

# Квант

**8**  
1983

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



Эта карта дна  
Атлантического океана  
составлена по данным,  
полученным с помощью  
звукового зондирования  
океанического дна.  
Об акустических методах  
исследования Океана  
читайте  
в статье Ю. Ю. Житковского.



Научно-популярный  
физико-математический журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР

**Квант**  
и

**8 1988**

Основан в 1970 году



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

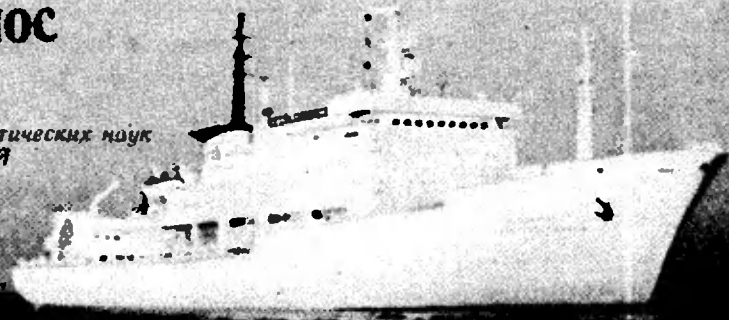


	<b>В НОМЕРЕ:</b>		<b>IN THIS ISSUE:</b>
2	Ю. Ю. Житковский. Физики изучают гидрокосмос		<i>Yu. Yu. Jitkovski. Physicists study the hydrocosmos</i>
7	А. И. Анохин, З. Д. Ломкина. Математика мореплавателя		<i>A. I. Anokhin, Z. D. Lomkina. Mathematics for the seaman</i>
13	А. Д. Чернин. Вспыхивающие рентгеновские звезды		<i>A. D. Chernin. Flashing X-ray stars</i>
20	М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Теорема Борсука — Улама		<i>M. G. Krein, A. A. Nudelman. The Borsuk — Ulam theorem</i>
26	А. Н. Пегов. Что случилось с лампочкой?		<i>A. N. Pegov. What happened to the light-bulb?</i>
31	<b>Новости науки</b> И. В. Карпова. Необычные кристаллы-генераторы		<b>Science news</b> <i>I. V. Karpova. Unusual crystals-generators</i>
32	<b>Математический кружок</b> И. Ф. Шарыгин. Вокруг биссектрисы		<b>Mathematics circle</b> <i>I. F. Sharygin. About bissectors</i>
38	<b>Школа в «Кванте»</b> Л. В. Печерский. Когда $ a+b  =  a + b $ ?		<b>Kvant's school</b> <i>L. V. Pecherski. When does <math> a+b  =  a + b </math>?</i>
41	<b>«Квант» для младших школьников</b> Задачи		<b>Kvant for younger school-children</b> Problems
42	Е. Е. Семенов. Степа Мошкин путешествует		<i>E. E. Semionov. Stepa Moshkin travels</i>
46	<b>Задачник «Кванта»</b> Задачи М816 — М820; Ф828 — Ф832		<b>Kvant's problems</b> Problems M816—M820; P828—P832
50	Решения задач М801 — М805; Ф813 — Ф817		Solutions M801—M805; P813—P817
57	<b>Игры и головоломки</b> В. А. Сапронов. Рэндзю		<b>Games and puzzles</b> <i>V. A. Sapronov. Renju</i>
60	<b>Рецензии, библиография</b> Е. П. Левитан. Какое оно — наше Солнце?		<b>Book reviews</b> <i>E. P. Levitan. What is it like — our Sun?</i>
61	<b>Информация</b> Всесоюзный смотр		<b>Information</b> All union meeting
62	В. Н. Сергеев. Конкурс проектов		<i>V. N. Sergeev. Contest of projects</i>
62	Вечерняя физическая школа при МГУ		Moscow state university physics evening school
63	<b>Ответы, указания, решения</b> Смесь (25, 37, 45, 56, 60) Шахматная страничка Каспаров играет магараджей (3-я с. обложки)		<b>Answers, hints, solutions</b> Miscellaneous (25, 37, 45, 56, 60) The chess page <i>Kasparov plays maharajahs (3rd cover-page)</i>

На первой странице обложки приведена фотография обложки лампочки накаливания. От того, когда и почему может перегореть такая лампочка, вы узнаете в статье А. Н. Пегова.

# Физики изучают гидрокосмос

Доктор физико-математических наук  
Ю. Ю. ЖИТКОВСКИЙ



Океан... Для Земли — это две трети ее поверхности. Океан — это колыбель всего живого на Земле, океан — это кухня погоды (к сожалению, человек пока не повар на этой кухне), океан — это дорога, которая служит человечеству тысячелетия и, надо думать, прослужит еще долго без ремонта; наконец, океан — природная кладовая белков и, как любят говорить, «исчерпаемая кладовая» минерального сырья. Думаю, следует говорить более осторожно, так как «исчерпаемые запасы» многих видов рыб, увы, уже исчерпаны.

В XX веке суша стала мала человеку, ее границы стали ему тесны, и он стал рваться за ее пределы — в океан, в воздух, в космос.

Что человек может найти в океане? О продуктах уже было сказано. Нефти в море, точнее — под морем, содержится не меньше, чем на суше. Сейчас со дна морского добывают около 20% мировой добычи нефти, а к 2000 году, предположительно, океанская нефть будет составлять 50% всей добычи. Большое количество каменного угля уже сегодня добывают из морских шахт. Более 4% мировой добычи серы дают морские промыслы. Значительная часть мировой добычи руд редких металлов приходится на морские россыпи. Вели-

ка добыча в море олова, золота, серебра, алмазов, марганца, кобальта, никеля... Так в чем же дело? Океан рядом, он таит в себе несметные богатства! Казалось бы, бери да осваивай его!

Почему же так медленно идет освоение океана? Почему в первой половине XX века рельеф видимой стороны Луны был нам известен лучше, чем рельеф дна океана? Почему, наконец, на высоте более 100 км над Землей побывало уже более ста человек, а на глубине океана, в десять раз меньшей, только двое? И почему человек назвал глубины океана гидрокосмосом?

В основном освоению океана мешают две причины. Одна причина очевидна — это гидростатическое давление. На глубине в 10 км на каждый квадратный метр поверхности давит десять тысяч тонн воды. Кроме того, не надо забывать, что морская вода — весьма агрессивная жидкость, быстро разъедающая большинство металлов.

Вторая причина, мешающая освоению океана, — это громадное затухание электромагнитных волн в хорошо проводящей соленой морской воде. Из-за этого человек в океане практически лишен основных привычных ему средств получения ин-

формации и связи. Эти трудности, мешающие проникновению человека в океан, проблемы, связанные с их преодолением, пожалуй, сравнимы с трудностями освоения космоса. Поэтому глубины океана и назвали гидрокосмосом.

Однако есть один вид волн, которые в воде распространяются гораздо лучше, чем в воздухе, — это акустические волны. Конечно, акустика в океане не может полностью заменить оптику, радиолокацию, радиосвязь, телевидение и другие средства, основанные на электромагнитных волнах. Но это уже некий «луч света в темном царстве» гидрокосмоса.

К сожалению, законы распространения акустических волн в океане весьма сложны. Мы привыкли, что луч света, как правило, есть кратчайшее расстояние между двумя точками. Для звуковых лучей в океане это далеко не так. Океан представляет собой слоисто-неоднородную среду, то есть в первом приближении его можно представить в виде горизонтальных однородных слоев воды, плотность воды и скорость звука меняются по вертикали от слоя к слою.

Изменение скорости звука приводит к искривлению звуковых лучей.

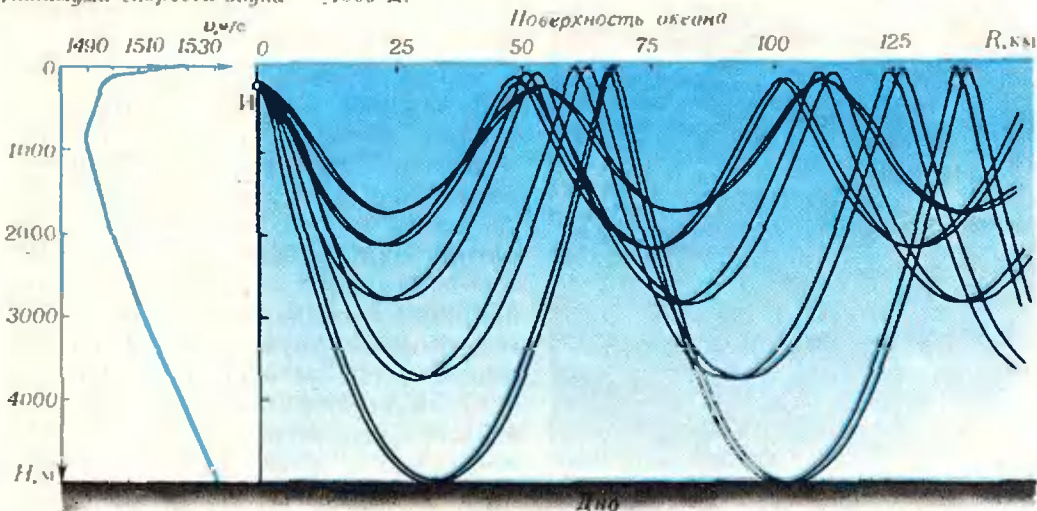
обуславливает чрезвычайно сложную картину акустического поля в океане. Например, на определенных расстояниях от источника звука появляются области повышенной концентрации акустической энергии (так называемые зоны конвергенции) и, наоборот, зоны тени, куда акустическая энергия практически не проникает.

В большинстве случаев условия распространения звука создают в океане на определенной глубине так называемый подводный звуковой канал, ось которого совпадает с горизонтом минимума скорости звука. В звуковом канале сконцентрирована распространяющаяся от источника звуковая энергия. Наличие такого канала приводит к явлению сверхдальнего распространения звука. Так, взрыв небольшого заряда, произведенный на оси такого канала, может быть зарегистрирован на расстоянии 10—15 тысяч км.

Надо иметь в виду, что вся эта картина акустического поля не статична. Весь океан пронизан течениями, вихрями диаметром в сотни километров, районами, где глубинные воды поднимаются, а поверхностные, наоборот, опускаются. Поэтому картина акустического поля непрерывно меняется. Помните девиз

*Картина распространения в океане звука, излучаемого точечным источником (И), расположенным вблизи поверхности (влево от источника — симметричная картина). Слева на рисунке приведена зависимость скорости звука  $v$  от глубины.*

*Видно, что изменение скорости звука по глубине обуславливает искривление звуковых лучей. В океане появляются зоны тени, куда не попадает звук, и зоны повышенной интенсивности звука (там, где лучи сгущаются). Ось подводного звукового канала находится на глубине минимума скорости звука — 1000 м.*



«Наутилуса» капитана Немо — «Подвижный в подвижном»? Точнее было бы — «Подвижный в изменчивом».

Так красиво нарисованная нами картина параллельных горизонтальных слоев на самом деле искажена в пространстве существованием глубинных, так называемых «внутренних» волн, обусловленных колебаниями слоев воды различной плотности. Вертикальные колебания могут иметь периоды порядка суток и достигать размаха в 100 м. Толщу океанских вод могут пронизывать волны, вызванные подводными землетрясениями, — цунами.

Сложная картина акустических полей в океане связана и с наличием неровных границ — поверхности и дна, которые отражают и рассеивают падающую на них звуковую энергию. При этом верхняя граница (вода — воздух) практически непрозрачна для звука, а форма ее меняется во времени; нижняя граница — дно — неизменна во времени, но частично прозрачна для акустических волн, которые проникают в дно океана.

*Рассеяние акустических волн звукорассеивающими слоями.*



Прием слабых сигналов осложняется наличием окружающего шумового фона. Этот фон складывается из шумов, обусловленных динамическими процессами, в основном — ветровым волнением, из биологических шумов (известно, что морские животные весьма широко используют акустические волны), из сейсмического фона, шума проходящих судов и т. д.

Даже из такого краткого перечисления факторов, влияющих на распространение звука в океане, видна вся сложность процесса передачи и приема акустических сигналов в океане. Можно себе представить те трудности, которые встречаются при исследовании законов распространения звука в океане. А ведь эксперименты проводятся в очень широком диапазоне частот и на дистанциях от сотен метров до тысяч километров.

Изучение акустических полей в океане — только часть проблем, которые изучает акустика океана. Есть задачи, которые принято называть обратными. Характер распространения, отражения, рассеяния акустических волн дает информацию о свойствах среды, об объектах, отражающих и рассеивающих звук. Определение характеристик океана по такой информации — вот конечная цель этих исследований. Например, время распространения эхолотного импульса до дна и обратно позволяет измерять глубину океана. Акустические методы исследования океана заменяют традиционные «контактные» методы на экспрессные «неконтактные».

Теперь хотелось бы подробнее остановиться на некоторых вопросах. Я уже говорил о том, что окружающий шум мешает приему полезных акустических сигналов. Могу добавить, что рассеяние в обратном направлении также, вообще говоря, мешает приему сигналов, например сигналов связи. Но, с другой стороны, шум несет и информацию о его источниках, например о динамических процессах в океане, а рассеянные сигналы дают нам информацию о рассеивателях, в нашем случае — о неровностях по-



Преподаватели и студенты кафедры физики гидрокосмоса Московского физико-технического института (третий слева — заведующий кафедрой академик Л. М. Бреховских) на борту научно-исследовательского судна «Академик Мстислав Келдыш» в греческом порту Патры.



Глубоководный аппаратный комплекс. Снизу подвешен излучатель звука.

верхности и дна, а также о морских организмах.

В рамках журнальной статьи невозможно рассказать подробно обо всех исследованиях, проводящихся в океане. Здесь и исследования рельефа дна, и изучение его строения; исследование законов накопления осадков и изучение тепловых потоков, идущих со дна; определение химического состава океанических вод и исследование вихрей в водах океана, и многое, многое другое. Поэтому я попытаюсь рассказать более подробно только об исследованиях, связанных с изучением рассеяния звука морскими организмами.

Несколько десятилетий назад было обнаружено, что практически во всех районах Мирового океана, кроме его полярных областей, существуют скопления мелких морских организмов, локализованных по вертикали. Эти скопления состоят, как правило, из мелких рыбок размером в несколько сантиметров. Они формируют один или несколько слоев толщиной в десятки метров. Днем эти слои находятся на глубинах 200—1000 м, а ночью они поднимаются, или, как говорят биологи, мигрируют, к поверхности. Эти скопления рассеивают звук, причем рассеяние от них намного больше, чем от толщи воды, не содержащей морских организмов (то есть доля звуковой

энергии, рассеивающейся при прохождении сигнала через скопление рыбок, гораздо больше, чем в случае «чистой» воды). Такие скопления как раз и были обнаружены по рассеянию звука, что было зарегистрировано эхолотами как «ложное дно». Они были названы звукорассеивающими слоями (сокращенно ЗРС). Количество организмов и их видовой состав меняется в слоях от района к району, а поскольку эти мелкие рыбки служат пищей для более крупных промысловых рыб, то информация о ЗРС позволяет судить о распределении промысловых рыб. Эту информацию получают с помощью акустических волн.

Излучатель звука генерирует колебания определенной частоты. Когда колебания, распространяясь в толще воды, встречаются со скоплениями морских организмов, небольшая доля энергии рассеивается во все стороны, в том числе и в обратном направлении. Эта рассеянная энергия улавливается приемником звука, который располагается рядом с излучателем. Зная излученную мощность и измеряя интенсивность рассеянного сигнала, можно определить, какая доля энергии рассеивается в ЗРС. Меняя частоту колебаний излучателя, можно «настроить» на частоту собственных колебаний плавательного пузыря рыбки. При этом доля рассеянной энергии

резонансно возрастает. Частота собственных колебаний плавательного пузыря определяется его размерами, которые, в свою очередь, зависят от размера рыбки.

Таким образом, акустическое «зондирование» дает информацию о месте нахождения ЗРС, глубине их «залегания», о количестве рыбок, об их размерах.

Недавно на новом научно-исследовательском судне «Академик Мстислав Келдыш», принадлежащем Институту океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР, состоялась экспедиция в Атлантику по разработке акустических методов исследования океана (в ней принимали участие также студенты кафедры физики гидрокосмоса факультета общей и прикладной физики МФТИ).

В исследованиях использовался глубоководный аппаратный комплекс, представлявший собой герметичную сферу диаметром около полуметра, в которой находились мощный (несколько киловатт) генератор и исполнительное устройство, которое осуществляло управление генератором по команде сверху. Вне сферы находились излучатель и приемник звука. Этот комплекс мог опускаться на кабель-тросе на любую глубину от поверхности до 5000 м. С его помощью можно было делать подробный «разрез» океана от поверхности до дна.

Обычно читателей интересуют перспективы развития новых методов исследования океана. Что ожидает нас в будущем?

Развитие науки происходит, как правило, скачкообразно. Какой-то промежуток времени идет количественное накопление экспериментального материала, осмысливание и интерпретация наблюдений, фактов. Результатом этого является качественный скачок в теории, заметно продвигающий нас по пути приближения к истине. При этом многие, казалось бы, незыблемые и очевидные представления часто пересматриваются. Затем следует очередной этап накопления результатов исследования. И так далее. На мой взгляд, акустика океана в настоящее время находится в стадии накопления фак-

тов. Думаю, что этап этот будет довольно длительным, так как океан велик, изменчив и многообразен, а фронт исследований еще относительно узок, что в значительной степени связано с недостаточной технической оснащенностью исследований. Будут новые, более совершенные приборы и оборудование — будут новые результаты. Изучение океана требует дорогостоящего, часто весьма громоздкого оснащения.

Уже сегодня есть идеи, каким образом можно практически непрерывно получать информацию о характеристиках Мирового океана по всей его акватории. Этот метод получил название акустической томографии. Суть его заключается в следующем. По периметру района океана, характеристики которого необходимо знать, устанавливаются достаточно жестко несколько приемно-излучающих систем. Системы поочередно излучают акустические импульсы и принимают их. Принимаемые сигналы несут информацию о температуре, солености и других параметрах среды, через которую они распространялись, то есть о районе океана, «оконтуренном» приемно-излучающими системами. В результате можно будет непрерывно получать характеристики океанской среды. Ценность подобной информации очевидна.

На пути решения этой задачи, конечно, есть много трудностей. Во-первых, надо решить ее теоретически; во-вторых, надо неподвижно установить по всему Мировому океану множество достаточно мощных излучающих систем и управлять их излучением. В-третьих, надо создать парк мощных ЭВМ, которые могли бы в относительно короткое время обрабатывать громадный объем информации. И многое, многое другое...

Задача эта, несомненно, международного масштаба и пока еще не сегодняшнего дня. Однако у меня нет сомнения, что человечество решит ее.



# Математика мореплавателю

Капитан дальнего плавания  
А. И. АНОХИН,  
кандидат физико-математических наук  
З. Д. ЛОМАКИНА

## Три морские трагедии

Это случилось в середине прошлого века. Вскоре после того, как следовавший с Цейлона в Европу барк «Звезда» проиел остров Св. Елены, к нему стремительно приблизилась «Мрачная шутка» — черная бригантина синскавшего устрашающую известность пирата Бенито де Сото. На «Звезде», где, кроме немногочисленного экипажа, находились 25 солдат-инвалидов и почти столько же женщин и детей, не помышляли о сопротивлении, но надеялись откупиться находившимся в трюме грузом. Однако дело до переговоров не дошло — высадившиеся на барк пираты зверски убили несколько человек, включая капитана, а остальных загнали в трюм, забив гвоздями крышку люка. Затем морские разбойники разграбили судно, свалили мачты, изрубили рангоут, такелаж и устроили попойку, после которой вернулись на свою бригантину. Но прежде, чем «Мрачная шутка» на всех парусах убралась восвояси, Бенито де Сото убедился, что в корпусе «Звезды» ниже ватерлинии просверлены отверстия, через которые в несколько отсеков трюма поступала забортная вода. Но зловещему замыслу пирата не суждено было осуществиться. Почему? Об этом мы расскажем позже, когда немного разберемся в теории.

\* \* \*

В Лондоне к стене собора Св. Павла с конца прошлого века прикреплена бронзовая пластина. Выбитый на ней текст повествует о гибели броненосца «Капитан» и, быть может, невольно выражает упрек тем, по чьей вине она произошла.

Броненосец «Капитан» был построен в 1870 году. Те, кому доверялись тайны военного флота Великобритании, знали, что сие творение строителей необычно: в нем, так сказать, соединялось несовместимое — многочисленные артиллерийские установки, в том числе в громадных вращающихся башнях, мощная бортовая броня, усиленное парусное вооружение и весьма низкий

надводный борт, что должно было уменьшить вероятность попадания вражеских снарядов. Казалось бы, лучше не надо! Правда, привлеченный в качестве консультанта опытный инженер Рид заново произвел необходимые математические расчеты и заявил, что при незначительном воздействии усилившегося ветра броненосцу грозит опрокидывание. Однако это заключение специалиста, подтвержденное математическими расчетами, не было принято во внимание — высокочтимые лорды из Адмиралтейства настояли на своем.

Спуск броненосца на воду состоялся, как говорится, под звуки фанфар. А затем «Капитан» вместе с десятью другими кораблями принял участие в учениях. Внезапно налетел шквал. Все корабли не особенно ощутили его силу. Все, за исключением броненосца «Капитан», — он опрокинулся. Чем же была вызвана эта катастрофа?

\* \* \*

Апрель 1912 года. Мировая общественность, казалось, затаила дыхание — английский трансокеанский лайнер «Титаник» в первый раз пересекал Атлантику. Самое большое и комфортабельное судно того времени: длина — 270 метров, водоизмещение — 66 тысяч тонн, спортивные залы, бассейны, бани, бары, рестораны. Кроме того, плавучий остров высотой в пятнадцатипятиэтажный дом рекламировался как предел надежности.

Наступила очередная ночь замечательного плавания. Многие пассажиры отправились отдыхать, но немалое их число продолжало веселиться. И, видимо, никто из них не знал, что судно вошло в район, где ему угрожала встреча с айсбергами — ледяными исполинами, четыре пятах которых коварно прячутся под водой. В определенной степени уподобился пассажирам капитан, подгоняемый судовладельцем, требовавшим выдерживать график движения, рассчитанный на установление рекорда скорости пересечения Атлантики. Правда, капитан выставил шесть впередсмотрящих. Но простое сравнение дальности види-

мости и скорости судна показало бы, что на них нельзя надеяться. И действительно, когда один из впередсмотрящих заметил айсберг и доложил о нем, увернуться от плавающей ледяной скалы уже не было возможности. Своей подводной частью она бесшумно разрежала обшивку корпуса по длине 90 метров.

Трагедия «Титаника», его экипажа и пассажиров (из 2200 человек погибло 1517) описана во многих источниках. Поэтому мы затронем лишь один вопрос, который, кстати, не нашел широкого освещения. Однако все по порядку...

### Плавучесть и судьба барка «Звезда»

На известном каждому школьнику законе Архимеда основано свойство *плавучести* судна — способности плавать с заданной осадкой, неся на себе снаряжение и грузы, необходимые для нормальной эксплуатации.

На судно в спокойной воде (рис. 1, а) действуют два рода сил: сила тяжести  $\vec{P}$ , которая приложена в центре тяжести  $G$  судна и направлена вертикально вниз (к центру Земли), и сила гидростатического давления  $\vec{F}$ , которая приложена в так называемом *центре величины*  $C$  и направлена вертикально вверх. Под влиянием последней силы судно стремится всплыть, поэтому ее называют *силой поддержания*.

Если вес судна больше силы поддержания, судно, естественно, тонет. Кстати, этим и хотел воспользоваться Бенито де Сото, «загружая» барк «Звезда» забортной водой.

Для обеспечения плавучести судна в процессе его эксплуатации судоводителю требуется пользоваться многими математическими понятиями и приемами вычислений. В частности, для этого нужны чертеж судна и связанные с ним коэффициенты, параметры, определяющие посадку судна, уравнение равновесия судна; вычисляется вес судна и координаты его центра тяжести, объемное водоизмещение и координаты центра величины, изменение углубления от приема груза; определяется число тонн на единицу осадки. И все это требует больших

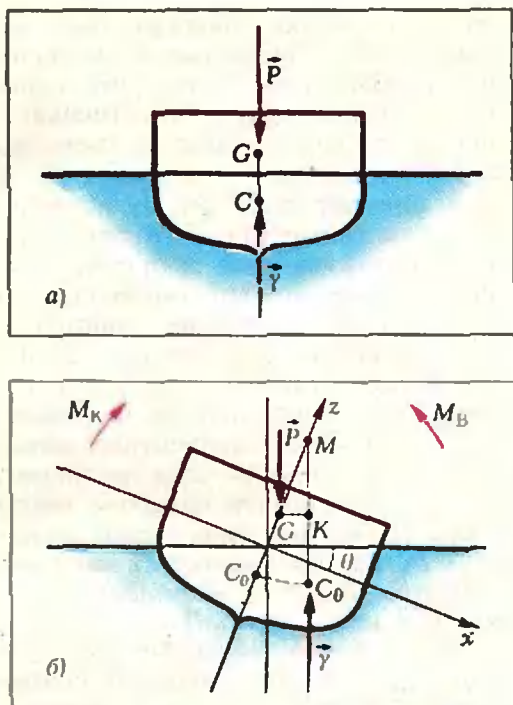


Рис. 1.

и точных математических расчетов. Вернемся теперь к заключенным в трюме «Звезды». Им удалось выбить крышки люка. Часть трюма затопило водой, судно дополнительно погрузилось. Однако Бенито де Сото просчитался — сила поддержания оказалась достаточной для того, чтобы барк удержался на плаву. И хотя погиб капитан, который мог бы произвести необходимые расчеты и установить, что судну не угрожает непосредственная опасность потопления, часть оставшихся в живых членов экипажа знала, что при том количестве груза, которое пираты оставили на разграбленном корабле, у них оставался запас плавучести. Это их воодушевляло в отчаянных попытках спасти барк и продержаться до того момента, когда их подобрала морская проходившего судна, случайно оказавшегося вблизи движущегося по воле стихии барка.

### Остойчивость и гибель «Капитана»

*Остойчивостью* называется способность судна, выведенного воздействием внешних сил из положения равновесия, возвращаться к нему снова после прекращения этого воздейст-

вия. Потеря остойчивости — скоротечный вид крушения, чаще всего приводящего к гибели не только судна, но и экипажа.

Различают продольную и поперечную остойчивость судна. Наибольшую опасность при плавании представляет потеря поперечной остойчивости. Наклонение судна в поперечной плоскости, перпендикулярной плоскости ватерлинии, называется *креном*, наклонение в продольной плоскости — *дифферентом*.

Поясним понятие остойчивости в случае крена.

Очевидно, для равновесия плавающего судна необходимо, чтобы сила  $\vec{P}$  и  $\vec{\gamma}$  (см. рис. 1, а) были равны по величине, а точки их приложения лежали на одной вертикали.

При наклонении судна на какой-либо борт под действием кренящего момента  $M_k$  (например, внезапного усиления ветра, как было с броненосцем «Каниган») на угол  $\theta$  центр величины судна, вследствие изменения формы подводного объема судна (рис. 1, б), переместится в сторону крена из положения  $C_0$  в положение  $C$ . В курсах теории устройства судна доказывается, что при малых углах крена траекторию перемещения центра величины можно принять за окружность с центром в некоторой точке  $M$  (см. рис. 1, б) и радиусом  $r$ . Точка  $M$  называется *поперечным метацентром*,  $r$  — *поперечным метацентрическим радиусом*.

Тогда пара сил  $\vec{P}$  и  $\vec{\gamma}$ , приложенных, соответственно, в точках  $G$  и  $C$ , образует так называемый *восстанавливающий момент*  $M_B$ . В курсах теоретической механики доказывается, что восстанавливающий момент можно определить по формуле

$$M_B = |\vec{P}| \cdot |GK| = |\vec{P}|h \cdot \sin \theta,$$

где  $h = r - z_G + z_C$ , а  $z_G$  и  $z_C$  — соответственно, координаты центра тяжести и центра величины в выбранной системе координат. В соответствии с этим выражением может быть три случая крена.

1.°  $M_B > 0$ , то есть центр тяжести лежит ниже метацентра (см. рис. 1, б). Тогда восстанавливающий момент действует в сторону возвращения судна в прямое положение; судно остойчиво.

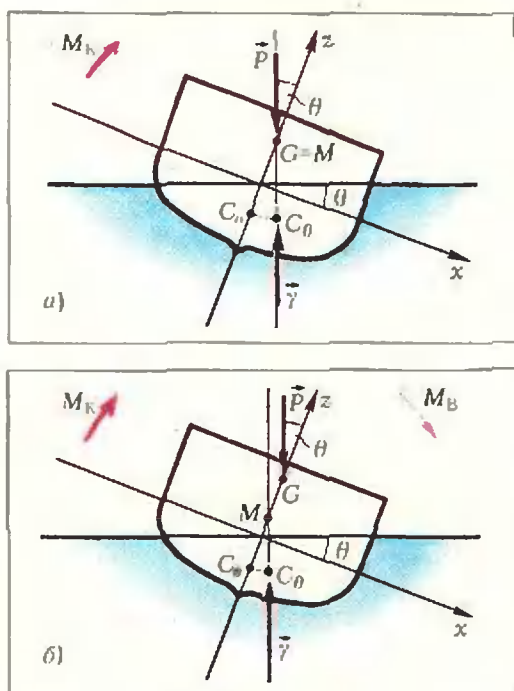


Рис. 2.

2°.  $M_B = 0$ , то есть центр тяжести совпадает с метacentром (рис. 2, а). Тогда сила тяжести  $\vec{P}$  и сила поддержания  $\vec{\gamma}$  действуют по одной прямой и восстанавливающего момента не возникает. Этот случай называется случаем *нулевой устойчивости* судна; практически судно неустойчиво.

3°.  $M_B < 0$ , то есть центр тяжести лежит выше метacentра (рис. 2, б). Тогда восстанавливающий момент действует в ту же сторону, что и кренящий момент, — в сторону увеличения крена; судно неустойчиво.

При крене судна на большой угол  $\theta$  физическая сущность явления не изменится, только формула для нахождения плеча  $GK$  устойчивости приобретает более сложный вид.

Таким образом, устойчивость судна нужно уметь рассчитывать по определенным законам при конструировании судна (именно этими расчетами инженера Риза и пренебрегли, когда приняли решение строить броненосец «Капитан»).

Но при этих расчетах конструкторы должны учитывать, что избыточную устойчивость тоже нельзя считать явлением положительным,

так как судно, обладающее избыточной устойчивостью, испытывает резкую бортовую качку, что отрицательно сказывается на самочувствии и работоспособности экипажа и работе судовых механизмов.

А при эксплуатации судна каждый капитан помнит, что любое достаточно устойчивое судно неразумными действиями можно привести в неустойчивое состояние. Например, если капитан рыболовного судна, увлекшись ловом (такой уж богатый попался косяк!), не проследит за тем, чтобы своевременно обработать и уложить улов в трюмы, на палубе скопится слишком много рыбы. Как следствие, центр тяжести судна поднимется выше метacentра и судно потеряет устойчивость.

При работе на судах следует учитывать, что при приеме и снятии груза взаимное расположение центра тяжести и центра величины меняется, что влечет за собой изменение устойчивости. Поэтому при грузовых операциях в море и в порту капитан должен контролировать и регулировать устойчивость судна. Для этого в процессе грузовых работ производят расчет устойчивости по определенным формулам и схемам, учитывая вес и расположение имеющихся на судне запасов топлива, питьевой воды, балласта, пищевых запасов и принимаемого или снимаемого груза.

### Непотопляемость и крушение «Титаника»

Каждое судно, естественно, должно обладать *непотопляемостью*, то есть способностью оставаться на плаву и не опрокидываться при затоплении части его отсеков. Другими словами, при затоплении одного или нескольких отсеков судно должно сохранять плавучесть и устойчивость.

А что случилось с получившим повреждение корпуса «Титаником»? По словам одного из очевидцев катастрофы, поначалу этот гигант покачивался на небольшой зыби, сияя огнями иллюминаторов и окон, лишь слегка наклонившись на нос. Затем дифферент стал резко возра-

стать. В воду ушли носовая часть и мостик, а кормовая часть поднялась вверх. В течение нескольких минут «Титаник» стоял почти вертикально и затем ушел в глубину.

Да, плавучий остров после повреждения держался на воде лишь два часа. И случилось это потому, что в период проектирования и постройки «Титаника» были нарушены основные требования непотопляемости: поперечные водонепроницаемые переборки, отделяющие один отсек от другого, не были доведены до верхней палубы, палубные люки не обладали водонепроницаемостью. В связи с этим и имея в виду решение состоявшегося после гибели «Титаника» лондонского суда, академик Алексей Николаевич Крылов писал: «Таким образом, вся вина целиком свалена на капитана, доблестно погибшего на своем посту, о самих же конструктивных недостатках, повлекших за собой его гибель при сравнительно небольшом повреждении, в постановлении суда не упомянуто ни единым словом».

Основателями науки о непотопляемости являются адмирал С. О. Макаров, академик А. Н. Крылов и профессор И. Г. Бубнов. Именно А. Н. Крылов, опираясь на идеи С. О. Макарова, разработал теоретическую сторону непотопляемости и создал таблицы непотопляемости. Кстати, в 1905 году, в период русско-японской войны, при Цусимском сражении, когда погибло три броненосца, однотипный с ними и получивший не меньше повреждений



«Орел» был спасен, так как инженер-механик броненосца практически использовал исследования А. Н. Крылова.

Что касается таблиц непотопляемости Крылова, позволяющих вести успешную борьбу за живучесть судна, то к 1930 году они были приняты на флотах уже почти всех стран мира.

### Безопасность судов в наши дни

Но, быть может, достижения науки и техники в области мореплавания и судостроения существенно убавили заботы о мореходных качествах судна и, таким образом, снизили значение математики? Да и необходима ли математика в других важнейших областях повседневной работы судоводителя?

Ныне морская стихия остается такой же грозной и коварной, какой была всегда. Достижения современной науки и техники, конечно, повысили степень безопасности плавания, но, с другой стороны, резко возросли объем, разнообразие и сложность задач, которые решают моряки сегодняшнего дня.

Так, в начале 1982 года крупнотоннажное судно «Серебрянка» вело промысел зверя среди льдов Арктики. Когда произошла внезапная подвижка пакового льда, мастерство капитана и возглавляемых им моряков позволило избежать губительных последствий, но судно получило все-таки две пробойны: во вспомогательном машинном отделении и в первом из трех трюмов. Моряки справились с заделкой пробойны. Но в процессе борьбы за живучесть судна капитану и его помощникам потребовалось быстро произвести многочисленные сложные и точные математические расчеты, показывающие, что именно необходимо сделать для уменьшения опасного дифферента в случае затопления поврежденных отсеков (разумеется, с учетом распределения имеющегося на судне груза).

К сожалению, во многих странах мира обеспечение безопасности су-

дов и борьба за живучесть судна далеко не всегда осуществляются успешно. По данным ассоциации «Институт оф Лондон андеррайтерс», объединяющей свыше 100 страховых компаний, в 1979 году мировой торговый флот понес самые большие потери за время существования судоходства. И почти все погибшие суда пребывали под опекой страховых компаний капиталистических государств. Названная ассоциация резко критикует судовладельцев, которые «...грубо нарушают инструкции и не соблюдают элементарные нормы безопасности, практически не уделяют внимания профессиональной подготовке судовых экипажей». Широко известное страховое общество «Регистр судоходства Ллойда» еще раньше обратилось к контактирующим с ним судовладельцам с отчаянным призывом всемерно усилить теоретическую и практическую подготовку моряков, особенно судоводителей. Указанное страховое общество вынуждено было обратиться и непосредственно к морякам: «Учитесь! Постоянно учитесь, если не желаете покончить на дне! Курс по имени Техническое Невежество ведет к катастрофе!»

Безусловно, математика является основополагающим фундаментом учебы судоводителя и вообще моряка. Об этом уже говорилось, когда затрагивались такие мореходные качества судна, как плавучесть, остойчивость и непотопляемость. Знание математики необходимо и для

решения большинства других повседневных задач судоводителя.

### Математика и судовождение сегодня

Одна из важнейших задач навигации в открытом море или океане — задача выбора оптимального курса. В случае, когда курс прокладывается на достаточно большое расстояние, поверхность Земли уже нельзя считать плоской. Тогда пользуются простейшей моделью навигационного пространства — сферой. Кратчайшим расстоянием от одной точки поверхности Земли до другой является *дуга большой окружности* (рис. 3). Нахождение параметров движения судна сводится к нахождению элементов сферического треугольника. Поэтому традиционным разделом всех «судоводительских» специальных курсов является *сферическая тригонометрия*, где выводятся основные формулы, связывающие элементы сферического треугольника (так называемые формулы синусов, косинусов и котангенсов).

Все вычисления производятся по строго продуманным схемам, результат должен иметь оценку с точки зрения его надежности и точности. Эта оценка производится, по правилам и формулам теории ошибок. Поэтому в руководствах по «Математическим основам судовождения» излагаются элементы курсов теории вероятностей и математической статистики.

Математика необходима и для того, чтобы владеть *мореходной астрономией*.

Без математики невозможно освоить и успешно эксплуатировать технические средства судовождения.

Продолжать дальнейший перечень нет смысла.

Упомянутый выше академик А. Н. Крылов, математик и корабельщик, сказал о своей специальности, что она — «... приложение математики к различным вопросам морского дела». Точно так и у судоводителя!

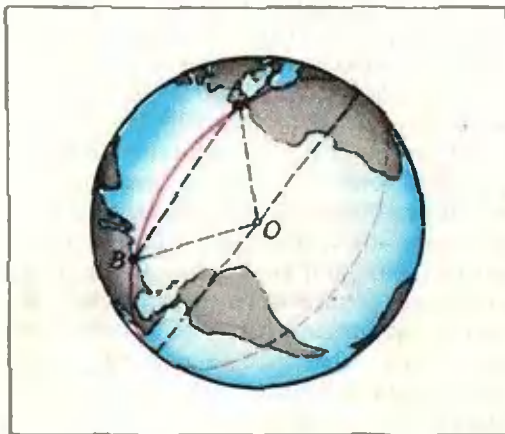
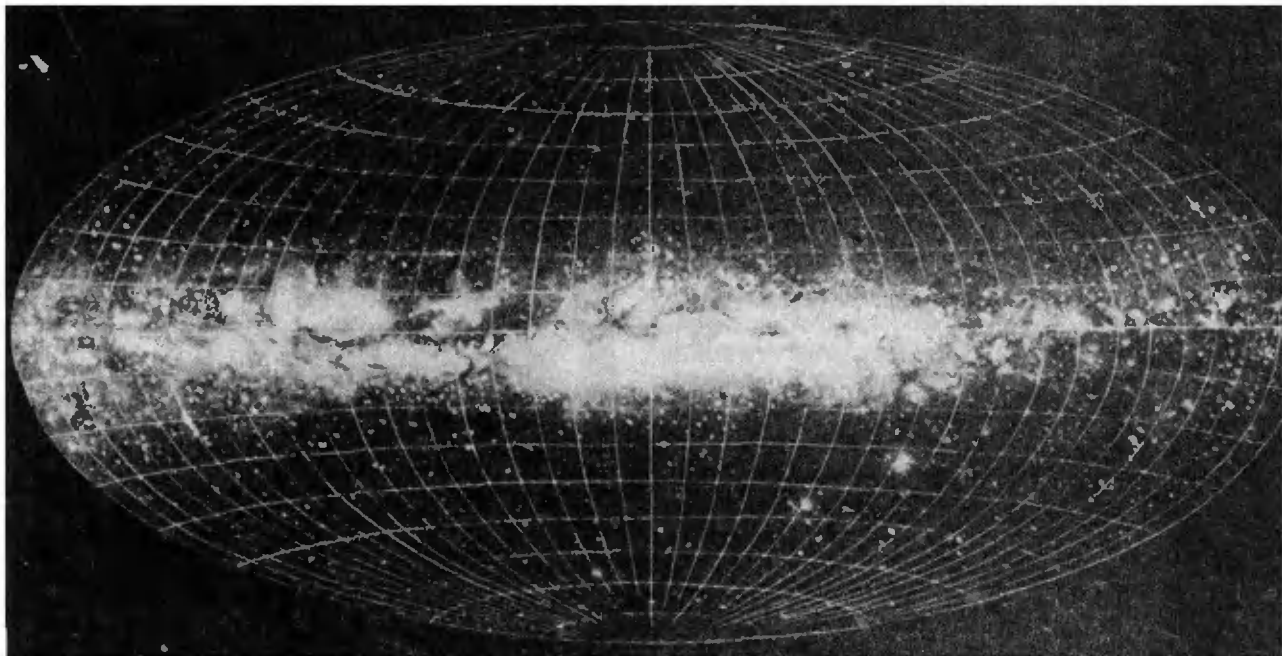


Рис. 3.



## Вспыхивающие рентгеновские звезды

Доктор физико-математических наук  
А. Д. ЧЕРНИН

В 1975 году группа советских астрономов сообщила о наблюдении коротких и мощных всплесков космического рентгеновского излучения. Вскоре американские ученые обнаружили вспышки рентгеновского излучения в центре одного из звездных скоплений нашей Галактики. Так началась история исследования барстеров — вспыхивающих рентгеновских звезд. Их название происходит от английского слова *burst*, что значит взрыв, вспышка. Сейчас известно более 30 таких звезд; 8 из них принадлежат звездным скоплениям.

То, что звезды способны излучать не только видимый свет, но и рентгеновские лучи, выяснилось в последние 15—20 лет, когда появились специальные рентгеновские телескопы, выносимые на высотных баллонах, ракетах, спутниках за пределы земной атмосферы (которая не пропускает к нам космическое рентгеновское излучение). Космические

источники испускают рентгеновские лучи в области длин волн от  $10^{-8}$  до  $10^{-10}$  м. Кванты, соответствующие этому диапазону электромагнитных волн, имеют энергию от 0,1 до 30 кэВ или от  $10^{-17}$  до  $3 \cdot 10^{-15}$  Дж.

**Барстеры — нейтронные звезды**

Нарастание блеска барстера\*) происходит за время от нескольких долей секунды до десяти секунд. Затем во время от нескольких секунд до нескольких минут блеск убывает до исходного уровня, и новая вспышка происходит через несколько часов или несколько дней (рисунок 1). Некоторые барстеры иногда «выключаются» на недели и месяцы.

\*) Говоря о нарастании блеска барстера, мы имеем в виду нарастание мощности рентгеновского излучения, испускаемого барстером. И дальше, говоря о невидимом для глаза рентгеновском излучении, мы будем пользоваться теми же привычными терминами, что и для видимого света.

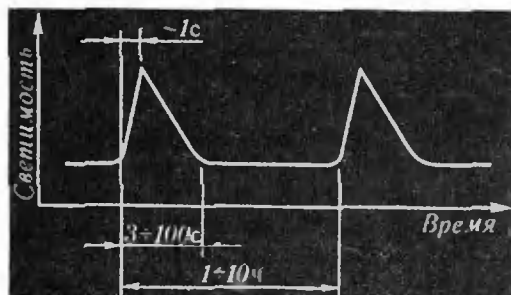


Рис. 1. Типичная зависимость светимости барстера от времени.

а затем снова «оживают», опять дают рентгеновские вспышки. Почти всегда вспышки барстеров происходят на фоне не исчезающей, хотя и несколько меняющейся со временем, рентгеновской светимости.

Расположение барстеров на небе и не хаотично, и не равномерно. Большинство их сосредоточено в направлении на центр Галактики, и их тем больше, чем ближе к центру (рис. 2). Это обстоятельство служит очевидным указанием на то, что барстеры принадлежат нашей Галактике. Более того, откуда следует, что типичное расстояние до барстера близко к расстоянию от нас до центра Галактики — это 10 кпс, или  $3 \cdot 10^{20}$  м.

Сигналы, принимаемые рентгеновскими телескопами во время вспышек разных барстеров, различаются по энергии приблизительно в десять раз. Значения плотности потока энергии, то есть энергии, приходящей на единицу поверхности в единицу времени, лежат в пределах

$$F = (3 \cdot 10^{-11} \div 3 \cdot 10^{-12}) \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Зная расстояние до источника —  $R = 3 \cdot 10^{20}$  м, можно найти его светимость, то есть полную энергию, излучаемую источником в единицу времени во все стороны:

$$L \approx 4\pi R^2 F = \\ = (3 \cdot 10^{30} \div 3 \cdot 10^{31}) \text{ Дж}/\text{с}.$$

Энергия, излучаемая барстером за время вспышки, получается умножением светимости  $L$  на длительность вспышки  $M$ : (здесь для длительности вспышки  $M$  принято среднее значение 10 с).

Таким же способом находится и фоновая, не исчезающая светимость барстера. Ее значение приблизительно одинаково для всех барстеров:  $L_0 \approx 10^{30}$  Дж/с.

Для понимания природы барстеров очень важно то обстоятельство, что во время вспышки барстер светится так, как светила бы поверхность тела, нагретого до температуры от десяти до тридцати миллионов градусов. Это установлено по виду спектра рентгеновского излучения барстера, то есть по характеру зависимости излучаемой энергии от дли-



Рис. 2. Положение барстеров в Галактике. 1 — центр Галактики; 2 — центральная плоскость Галактики.

ны волны\*). Средняя энергия  $\epsilon$  излучаемого кванта связана с температурой  $T$  тела приближенным соотношением  $\epsilon \approx kT$ , где  $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана. При температуре  $T = (1 \div 3) 10^7$  К значение  $\epsilon \approx (1 \div 4) 10^{-16}$  Дж действительно лежит в интервале энергий, характерных для рентгеновских лучей.

Согласно одному из законов термодинамики — закону Стефана — Больцмана, поверхность тела, нагретого до температуры  $T$ , излучает в единицу времени с единицы площади количество энергии, пропорциональное четвертой степени температуры тела:  $W = \sigma T^4$ . Коэффициент пропорциональности  $\sigma = 5,7 \times 10^{-8}$  Дж/( $\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}$ ) называют постоянной Стефана—Больцмана. Шар радиуса  $r$  имеет площадь поверхности  $4\pi r^2$ ; эта поверхность, если она нагрета до температуры  $T$ , создает светимость

$$L = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2.$$

С помощью этой формулы и на основании данных о температуре

\* На различные участки спектра излучающего тела приходится разные доли излучаемой энергии. Максимум энергии приходится на определенный интервал длин волн спектра. Чем выше температура тела, тем дальше смещается максимум в область малых длин волн. По тому, на какую длину волны приходится максимум излучаемой телом энергии, можно судить о температуре тела.



и вспышечной светимости барстера можно найти радиус его излучающей поверхности:

$$r = \left( \frac{L}{4\pi T^4} \right)^{1/2} \approx 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}$$

(в этой оценке использованы средние значения  $L = 10^{31}$  Дж/с,  $T = 2 \cdot 10^7$  К).

Как раз такие размеры имеют самые плотные из всех небесных тел — нейтронные звезды. Они возникают в результате сильного сжатия «обычных» звезд на поздних стадиях их эволюции.

#### Эволюция звезд

Солнце и подобные ему «обычные» звезды светят за счет выделения энергии при термоядерных реакциях, происходящих в их недрах. Ядерным топливом для них служит водород. Превращение водорода в гелий способно поддерживать светимость Солнца на неизменном уровне еще многие миллиарды лет. Звезды же более массивные, чем Солнце, светят ярче и быстрее расходуют ядерное горючее. Искерпав водород, они «сжигают» в своих недрах гелий, превращая его в углерод; затем может «загореться» и углерод и т. д. Ядерный ресурс звезды исчерпывается, когда в этом процессе превращения легких элементов в тяжелые почти все вещество звезды превращается в железо. Железо уже не «горит»: ядра железа не могут превращаться в еще более тяжелые ядра с выделением энергии.

Звезда, лишенная источников энергии, охлаждается, давление в ней падает, и рано или поздно сила давления оказывается недостаточной для противодействия силам гравитационного притяжения, действующим внутри звездного вещества. Под действием сил тяготения звезда начинает сжиматься, ее плотность возрастает, и в структуре звезды происходит существенная перестройка, итогом которой может быть одно из трех новых состояний. Какое из этих состояний осуществится, зависит от массы звезды.

Если масса звезды велика и превосходит массу Солнца ( $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30}$  кг) не менее чем в 3—5 раз, то звезда неустойчиво сжимается (так называемый гравитационный коллапс) и в конце концов превращается в черную дыру. Если масса звезды мала и не превышает 1,5 масс Солнца, то сжатие звезды останавливается при средней плотности звездного вещества около миллиарда килограммов в кубическом метре и радиусе, составляющем одну сотую радиуса Солнца ( $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8$  м). Такие звезды — их называют белыми карликами — известны давно; они излучают свет за счет остатка своей тепловой энергии, постепенно, в течение нескольких миллиардов лет, охлаждаются, сжимаются и становятся невидимыми.

Звезды промежуточных масс, от 1,5 до 3—5 масс Солнца, сжимаются до радиуса приблизительно в 10 километров; плотность звездного вещества достигает при этом

$10^{18}$  кг/м — значения, сравнимого с плотностью внутри атомных ядер. При такой плотности в веществе звезды происходит нейтронизация: электроны как бы вдавливаются в протоны, и из слияния электронов с протонами получаются нейтроны. Так возникает звезда, почти целиком состоящая из нейтронов, — нейтронная звезда.

Нейтронные звезды были обнаружены в 1967 году, когда радиоастрономы зарегистрировали быстрые периодические пульсации радиоизлучения, источником которых могли быть только сверхплотные звезды с радиусом до 10 км. Позднее были открыты и нейтронные звезды, испускающие периодические импульсы рентгеновского излучения. И те, и другие источники были названы пульсарами. Периодичность их излучения связана с быстрым вращением нейтронных звезд: периоды пульсаров, то есть промежутки времени между максимумами излучаемых ими импульсов, совпадают с периодами вращения нейтронных звезд и остаются постоянными с огромной точностью — до восьмого знака.

Теперь к пульсарам прибавилась новая разновидность нейтронных звезд — барстеры.\*).

#### Аккреция

Имеются прямые наблюдения свидетельства того, что барстеры представляют собой не одиночные нейтронные звезды, а нейтронные звезды в двойных звездных системах. Их компаньонами в звездных парах служат «обычные» звезды, в недрах которых происходит термоядерное горение.

Эти двойные системы оказываются довольно тесными, при своих орбитальных движениях в паре звезды находятся друг от друга на расстояниях, сравнимых с их радиусами. По этой причине нейтронная звезда может увлекать и захватывать своим сильным полем тяготения часть вещества с поверхности звезды-компаньона. В тесной паре происходит непрерывное перетекание вещества с «обычной» звезды на нейтронную. Процесс захвата вещества гравитационным полем звезды называется аккрецией.

Захватываемое вещество срываетсЯ или истекает с поверхности звезды-компаньона и, ускоряясь при

\* Подробнее об эволюции звезд можно прочитать в книгах С. А. Капдыка «Физика звезд» (М., Наука, 1977) и И. С. Шкловского «Звезды: их рождение, жизнь и смерть» (М., Наука, 1978); нейтронным звездам была посвящена статья А. Б. Мигдала в первом номере «Кванта» за 1982 год.

падения в поле тяготения нейтронной звезды, приобретает значительную скорость и кинетическую энергию. Неизбежное столкновение с поверхностью нейтронной звезды приводит к торможению вещества, к превращению его кинетической энергии в тепло. Из-за этого поверхность нейтронной звезды разогревается и начинает излучать электромагнитные волны.

Эта картина напоминает то, что происходит в рентгеновской трубке, — там тоже частицы (электроны) разгоняются (электрическим полем), а затем тормозятся (при столкновении с анодом), и их кинетическая энергия идет на излучение электромагнитных волн рентгеновского диапазона.

Постоянный разогрев поверхности нейтронной звезды за счет кинетической энергии аккрецируемого вещества способен обеспечить рентгеновское излучение, на фоне которого наблюдаются вспышки. Выясним, каким должен быть темп аккреции, чтобы «фоновая» рентгеновская светимость была на уровне наблюдаемой величины  $L_0 \approx 10^{30}$  Дж/с.

Для этого нужно прежде всего определить скорость, с которой вещество падает на нейтронную звезду. Ее можно оценить по приближенной формуле

$$v \approx \left( \frac{GM}{r} \right)^{1/2}, \quad (*)$$

где  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup> — гравитационная постоянная,  $M$  — масса звезды,  $r$  — ее радиус.

Формулу (\*) можно получить, воспользовавшись законом всемирного тяготения, согласно которому два тела с массами  $M_1$  и  $M_2$  притягиваются с силой  $GM_1M_2/r_{12}^2$ , где  $r_{12}$  — расстояние между ними. В нашей задаче под  $M_1$  следует понимать массу частицы захватываемого вещества, под  $M_2 = M$  — массу нейтронной звезды, под  $r_{12}$  — расстояние до частицы от центра нейтронной звезды. Сила тяготения, совершая работу над частицей, изменяет ее скорость. Правда, переход от закона всемирного тяготения к приближенной формуле (\*) проделать не совсем просто. Дело в том, что сила тяготения меняется по мере приближения частицы к поверхности звезды. Этим наша задача отличается от задачи о свободном падении в поле тяготения Земли. Когда высота  $h$ , с которой падает тело, очень мала по сравнению с радиусом Земли  $r_\oplus$ , можно пренебречь изменением силы тяготения на расстояниях

$\sim h \ll r_\oplus$  и считать, что эта сила постоянна; постоянно тогда и ускорение силы тяжести  $g = GM_\oplus/r_\oplus^2$  ( $M_\oplus$  — масса Земли).

В этом случае, как известно, скорость, с которой тело подходит к поверхности Земли,

равна  $v = \left( \frac{2GM_\oplus h}{r_\oplus} \right)^{1/2}$ . Для очень грубой

оценки эту формулу можно применять и в случае расстояний, не слишком малых по сравнению с радиусом  $r_\oplus$ : если скажем, взять высоту  $h$  равной половине  $r_\oplus$ , то формула примет тот же вид, что и соотноше-

ние (\*):  $v \approx \left( \frac{GM_\oplus}{r_\oplus} \right)^{1/2}$ .

Скорость падения вещества на нейтронную звезду, оцениваемая по приближенной формуле (\*), оказывается очень большой, сравнимой со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Подставляя, например, в качестве массы звезды удвоенную массу Солнца и беря для радиуса значение 10 км, найдем, что  $v = 1/2 c$ .

Если на поверхность нейтронной звезды выпадает за единицу времени масса вещества  $j$ , то энергия, которая сообщается звезде за единицу времени, равна

$$Q = \frac{1}{2} j v^2.$$

Температура поверхности звезды становится постоянной, когда энергия, получаемая от аккрецируемого вещества, становится равной энергии, излучаемой звездой. Такое состояние соответствует фоновой светимости барстера, более или менее постоянной во времени. Приравняв величину фоновой светимости  $L_0$  (потеря энергии) величине  $Q$  (приход энергии к поверхности звезды), найдем поток аккреции:

$$j = \frac{2L_0}{v^2}.$$

С помощью известных значений  $L_0$  и  $v$  находим, что  $j \approx 10^{14}$  кг/с. В таком количестве звезда-компаньон способна поставлять вещество нейтронной звезде в течение многих миллионов лет.

### Термоядерные взрывы

Но что вызывает рентгеновские вспышки, резкие нарастания светимости барстеров? Тот факт, что импульсы излучения барстеров следуют

один за другим без какой-либо четкой периодичности, означает, очевидно, что механизм вспышек не связан ни с собственным вращением нейтронной звезды вокруг оси, ни с ее периодическим орбитальным движением в двойной звездной системе. Иначе барстеры были бы такими же хорошими часами, как пульсары.

Причина вспышек — в тех превращениях, которые испытывает вещество, выпавшее на поверхность нейтронной звезды.

Захваченное барстером вещество звезды-компаньона имеет обычный звездный химический состав: (70—75)% водорода (по массе), около (25—30)% гелия, приблизительно 1% более тяжелых элементов. При ударе о поверхность нейтронной звезды газ сжимается и разогревается до такой степени, что становятся возможными термоядерные реакции превращения водорода в гелий — такие же, как и в недрах Солнца и других «обычных» звезд.

Выделяющаяся в реакциях энергия добавляется к той энергии, которую сообщает поверхности звезды аккреция. Эта добавка, однако, не очень велика. Действительно, в ядерных превращениях — пусть даже до полного «сгорания», то есть превращения водорода в железо, — выделяется не больше чем  $0,01 c^2$  энергии на единицу массы вещества. Поэтому энергия, выделяемая в единицу времени при термоядерном горении аккрецируемого вещества, не превышает величины  $0,01 c^2 j$ . Сравнивая это с нашей оценкой кинетической энергии аккрецируемого вещества, найдем, что термоядерные реакции дают приток энергии, который приблизительно в тридцать раз меньше энергии аккреции.

Важнее здесь другое. В результате термоядерных реакций горения водорода на поверхности нейтронной звезды образуется слой гелия. Оказывается, именно в слое гелия и развиваются процессы, вызывающие вспышки.

Более 30 лет назад Л. Э. Гуревич и А. И. Лебединский, разрабатывая теорию поздних стадий эволюции звезд, обнаружили, что при определенных условиях на звездах мо-

гут происходить термоядерные взрывы. В звезде, исчерпавшей ядерное горючее в своей центральной области, чаще всего имеются близкие к поверхности слои, где вещество еще богато водородом, гелием и другими легкими элементами. Представим себе ситуацию, когда температура в этих слоях весьма высока, но все же не достаточна для протекания ядерных реакций. Пусть, далее, по какой-либо причине температура в одном из этих слоев повысится и окажется вдруг выше критического предела, с которого становится возможным ядерное горение. Что будет происходить дальше?

Очевидно, начнутся ядерные реакции с выделением тепла. Но будет ли температура слоя оставаться достаточно высокой? Повысится ли она или понизится? Это зависит от соотношения между темпом выделения тепла в ядерных реакциях и темпом отвода тепла из слоя наружу. Если тепло уходит из слоя очень быстро, почти мгновенно, то ясно, что, едва начавшись, ядерные реакции тут же и затухнут, так как температура слоя сразу понизится и станет меньше критической.

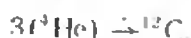
Иной результат следует ожидать в случае, если тепло, выделяемое при ядерных реакциях, не успевает быстро покидать слой, так что происходит дальнейшее повышение его температуры. С повышенном температуры ядерные реакции протекают все эффективнее, быстро растет выделение тепла, и в результате температура слоя продолжает нарастать. Но тогда ядерные реакции пойдут еще быстрее, приток тепла повысится и т. д. Можно сказать, что процесс ядерного энерговыделения развивается в этом случае лавинообразно, поддерживая и ускоряя сам себя. А это — взрыв. В слое ядерного горения звезды этот процесс развивается потому, что скорость ядерных реакций очень чувствительна к температуре: чем выше температура, тем эффективнее ядерные реакции, тем быстрее выделяется тепло.

Об этом явлении вспомнили сразу же, как только были открыты барстеры; астрономы разных стран бы-

стро пришли к общему мнению, что вспышки рентгеновского излучения обусловлены взрывным термоядерным горением во внешних слоях нейтронных звезд.

Количественное исследование этого процесса требует сложных вычислений. Расчеты ведутся на крупных вычислительных машинах. Это позволяет должным образом учесть структуру слоя, его тепловой баланс, определяемый нагревом при ядерных реакциях и охлаждением из-за теплопроводности и излучения, и большое разнообразие других факторов, существенно влияющих на физику явления. Детальные исследования показали, что термоядерные взрывы, сопровождающиеся вспышками рентгеновского излучения, происходят в слое гелия, образующемся на поверхности нейтронной звезды в результате аккреции. Согласно расчетам, этот слой имеет толщину приблизительно в один метр, плотность свыше миллиарда килограммов в кубическом метре и температуру около полумиллиарда градусов.

При таких условиях способна протекать реакция объединения трех ядер гелия в ядро углерода:



Эту реакцию в ядерной физике называют тройным альфа-процессом (ядро гелия — это альфа-частица). Из-за чрезвычайно высокой температурной чувствительности тройной альфа-процесс действительно может развиваться взрывообразно. В гелиевом слое он протекает столь стремительно, что температура слоя может подскочить, скажем, вдвое за несколько сотых долей секунды. Никакой теплоотвод не поспевает за таким темпом энерговыделения: раз начавшись, горение гелия идет со всей возрастающей скоростью, пока весь он не превратится в углерод. \*)

При «сгорании» одного килограмма гелия выделяется  $10^{14}$  джоулей энергии. Сколько всего энергии выделяется за вспышку? Для ответа на

\*) В отличие от гелия, горение водорода на нейтронной звезде происходит в спокойном режиме, без взрыва, и заметное парастание температуры в реакциях превращения водорода в гелий всегда происходит за время в несколько сот секунд, что слишком медленно для развития взрыва.

этот вопрос нужно, очевидно, знать массу гелиевого слоя.

Так как гелия полностью «сгорит» за один взрыв, его накопление происходит за время между взрывами. Беря для оценки промежуток между двумя рентгеновскими вспышками порядка  $\Delta T \approx 10^3$  с и пользуясь уже полученной выше оценкой для скоростей аккреции  $j = 10^{14}$  кг/с, найдем массу слоя:  $m = j \cdot \Delta T \approx 10^{18}$  кг.

Теперь умножим эту величину на энергию, выделяемую одним килограммом гелия, и получим оценку полной энергии вспышки: это дает  $10^{32}$  Дж. Такая величина хорошо согласуется с наблюдательными данными, о которых мы выше говорили.

Можно оценить также и типичную продолжительность вспышки. Для этого нужно воспользоваться сведениями из ядерной физики о скорости выделения энергии в тройном альфа-процессе при данных плотности и температуре вещества. Для указанных выше характеристик гелиевого слоя получается приблизительно  $10^{13}$  джоулей энергии на каждый килограмм вещества в секунду. При массе слоя  $10^{18}$  кг это дает полную скорость энерговыделения около  $10^{31}$  Дж/с.

Эта величина весьма близка к типичной наблюдаемой светимости барстера во время рентгеновской вспышки.

Теория хорошо объясняет также и соотношение между вспышечной и спокойной, фоновой, светимостью барстера.

Все это позволяет считать, что природа излучения барстеров разгадана. Но остаются все же серьезные вопросы, на которые пока нет ответа.

### Вопросы и гипотезы

Вспомним, например, что из трех десятков известных барстеров восемь, то есть приблизительно одна четверть, принадлежат звездным скоплениям. Во всех восьми случаях это так называемые шаровые скопления, состоящие из наиболее старых звезд Галактики и насчитывающие каждое приблизительно по миллио-

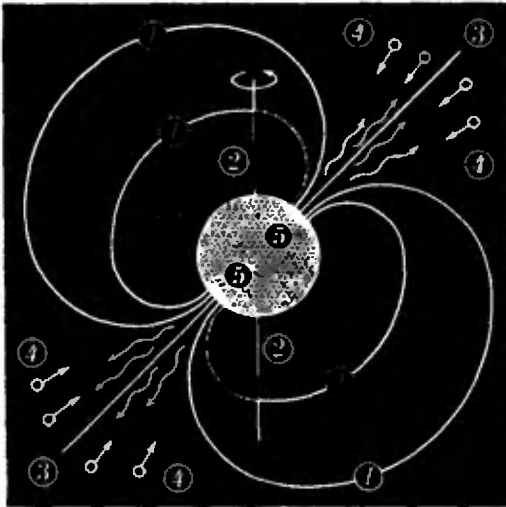


Рис. 3. Схема рентгеновского пульсара (аккреция в магнитном поле, излучение горячих пятен). 1 — силовые линии магнитного поля; 2 — ось вращения нейтронной звезды; 3 — магнитная ось звезды; 4 — частицы вещества, подающие к магнитным полюсам; 5 — горячие пятна у полюсов.

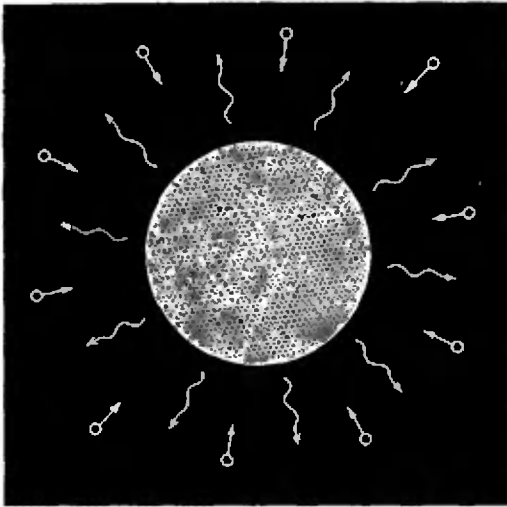


Рис. 4. Схема барстера (аккреция, нагрев и излучение со всей поверхности).

ну звезд. Все 124 известных шаровых скопления Галактики содержат чуть больше ста миллионов звезд, что составляет одну тысячную полного числа звезд Галактики. Отсюда видно, что барстеры определенно предпочитают возникать среди звезд шаровых скоплений. Причину этого предпочтения еще предстоит понять. Почему нейтронная звезда проявляет себя в одних случаях как барстер, а в других — как пульсар?

Или иначе: почему барстер не пульсирует, а пульсар не вспыхивает?

Полагают, что рентгеновские пульсары тоже входят в тесные двойные системы с перетеканием вещества и аккрецией. Возможно, в этом случае значительную роль играют магнитные поля. Магнитное поле нейтронной звезды, если оно достаточно сильное (в  $10^{12}$  раз сильнее среднего магнитного поля Солнца, равного  $10^{-4}$  Тл), способно изменять характер аккреции — вещество направляется полем преимущественно к магнитным полюсам звезды. Из-за этого нагрев оказывается неравномерным: у полюсов температура значительно выше, чем на всей остальной поверхности звезды. Горячие пятна у полюсов и создают, главным образом, излучение (вспомним, что светимость сильно зависит от температуры, она пропорциональна ее четвертой степени). Если звезда быстро вращается и при этом магнитная ось наклонена к ее оси вращения (рисунок 3), то возникает эффект маяка: яркое пятно то видно, то не видно наблюдателю, и излучение представляется прерывистым, пульсирующим.

Магнитное поле барстера, вероятно, слабее, чем у пульсара: оно не влияет на аккрецию, которая происходит более или менее равномерно по всем направлениям, так что вся поверхность нейтронной звезды прогревается одинаково и одинаково излучает (рисунок 4). Тогда вращение звезды, которое и здесь может быть быстрым, не проявится в излучении. Если так, то становится понятным, почему барстер не пульсирует. Но почему на пульсаре не происходят вспышки? Предполагают, что магнитное поле, управляющее аккрецией, способно каким-то образом предотвращать термоядерные вспышки на поверхности нейтронной звезды.

Эти догадки и гипотезы еще предстоит проверить дальнейшими теоретическими расчетами и астрономическими наблюдениями.



## Теорема Борсука — Улама

или  
Кое-что о погоде,  
о дрессированной лошади  
и двумерных полях

Член-корреспондент АН УССР  
М. Г. КРЕЙН,  
кандидат физико-математических наук  
А. А. ПУДЕЛЬМАН



Погода  
считается с топологией

Погода капризна и своенравна. Параметры, описывающие ее (например, давление, температура, влажность), непрерывно изменяются с течением времени и при переходе из одной местности в другую. На картах погоды изотермы и изобары могут иметь самые причудливые (и, увы, не всегда предсказуемые) формы. И тем не менее, как бы причудливо ни выглядела карта погоды земного шара, имеет место

*Теорема о погоде. В каждый момент времени на Земном шаре имеется пара диаметрально противоположных точек («антиподов»), в которых одинаковы как температура, так и давление.*

Это утверждение, облеченное в «метеорологическую» форму, на самом деле отражает не свойства земной атмосферы, а свойства функций, определенных и непрерывных на сфере. Она относится к топологии — отделу математики, который, в частности, занимается изучением свойств функций, или наборов функций, непрерывных на тех или иных множествах.

Некоторые свойства таких функций определяются структурой множеств, на которых они непрерывны. Например, для числовых функций, изучаемых в школе, справедлива геометрически очевидная

*Теорема о нуле функции. Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и на его концах принимает значение противоположных знаков, то между  $a$  и  $b$  есть такая точка  $x_0$ , в которой  $f(x_0) = 0$ .*

Мы не приводим доказательства этой наглядно очевидной теоремы, поскольку оно, как это ни странно, не элементарно.

Для справедливости теоремы о нуле существенны как непрерывность функции (почему?), так и то свойство отрезка, которое называется *связностью*

(в отрезке нет «пробелов», «просветов»). Так, функция  $f(x) = \sqrt{(x^2-1)(4-x^2)} + 2x$  непрерывна на своей области определения  $[-2, -1] \cup [1, 2]$  отрицательна на  $[-2, -1]$  и положительна на  $[1, 2]$ , а в нуль она не обращается ни в одной точке.

В этой статье рассказывается о некоторых свойствах пар функций, определенных и непрерывных на сфере. Но начнем мы с более простого случая — с одного неожиданного свойства функций, непрерывных на окружности.

### Случай окружности: бег дрессированной лошади

Пусть цирковая лошадь по команде дрессировщика плавно начинает бег по окружности арены из точки  $A$  и, заканчивая оборот, плавно останавливается в этой же точке. Оказывается, как бы ни изменялась ее скорость во время бега, можно указать две диаметрально противоположные точки арены, в которых скорость лошади имеет одно и то же значение.

Разумеется, дело здесь не в дрессировке лошади (которую мы в дальнейшем представляем себе в виде точки), а в свойстве непрерывных функций, о котором сейчас пойдет речь.

Будем определять положение лошади  $L$  на окружности с площадью угла  $\Theta$  ( $0 < \Theta < 2\pi$ ), который радиус  $OL$  образует с радиусом  $OA$ , проведенным в начальную точку (рис. 1); соответствующее значение скорости обозначим через  $v(\Theta)$ . Подразумевается, что функция  $v$  непрерывна на  $[0; 2\pi]$  (движение и остановки — плавные), по условию  $v(0) = 0$ ,  $v(2\pi) = 0$ . Точке  $L'$ , диаметрально противоположной точке  $L$ , при  $0 < \Theta < \pi$  отвечает угол  $\Theta + \pi$ . Требуется доказать существование та-

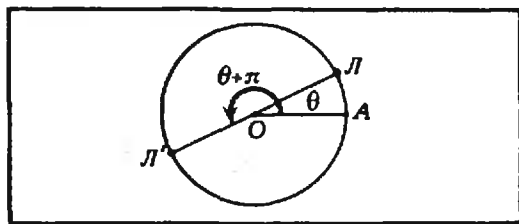


Рис. 1.

кого  $\Theta_0 \in [0; \pi]$ , для которого  $v(\Theta_0 + \pi) = v(\Theta_0)$ .

Рассмотрим функцию  $u(\Theta) = v(\Theta + \pi) - v(\Theta)$ . Нам надо найти такое  $\Theta_0 \in [0; \pi]$ , для которого  $u(\Theta_0) = 0$ . Функция  $u$  непрерывна на отрезке  $[0; \pi]$  (как разность непрерывных функций) и на концах этого отрезка ее значения  $u(0) = v(\pi) - v(0) = v(\pi)$  и  $u(\pi) = v(2\pi) - v(\pi) = -v(\pi)$  либо имеют противоположные знаки (если  $v(\pi) \neq 0$ ), либо равны нулю (если  $v(\pi) = 0$ ). В последнем случае  $\Theta_0 = 0$ ; если же  $v(\pi) \neq 0$ , то существование  $\Theta_0$  вытекает из теоремы о нуле.

Легко понять, что для доказательства несущественна неотрицательность функции  $u(\Theta)$  (обегая арену, лошадь может время от времени двигаться в обратном направлении) и условия  $v(0) = 0$ ,  $v(2\pi) = 0$ , существенно лишь равенство  $v(0) = v(2\pi)$  (точку  $A$  лошадь может пройти с разгона; важно, чтобы она вернулась в эту точку с той же мгновенной скоростью).

Очевидно, что  $v$  можно рассматривать как функцию не числа  $\Theta$ , а точки  $L$ , поэтому доказанную теорему можно сформулировать еще следующим образом:

**Теорема «о лошади».** Если некоторая функция определена на окружности и непрерывна на ней, то найдутся две диаметрально противоположные точки окружности, в которых эта функция принимает одинаковые значения.

### Математические формулировки теоремы о погоде

Переведем на математический язык теорему о погоде. В данный момент времени каждой точке  $P$  земной поверхности  $S$  ставятся в соответствие два числа — давление  $j(P)$  и температура  $g(P)$  в этой точке. Тем самым на сфере  $S$  определены две функции, которые предполагаются непрерывными на  $S$  — при малых изменениях положения точки  $P$  значения этих функций изменяются мало.

Точное определение непрерывности функции на произвольном точечном множестве  $X$  (расположенном на прямой, в плоскости или в пространстве) можно сформулировать так:

функция  $\varphi$  называется *непрерывной* в точке  $P_0 \in X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что для каждой точки  $P \in X$ , удаленной от  $P_0$  на расстояние, меньшее, чем  $\delta$ , имеет место неравенство  $|\varphi(P) - \varphi(P_0)| < \varepsilon$ ; функция *непрерывна на множестве*  $X$ , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Условимся антипод точки  $P \in S$  обозначать через  $P'$  ( $P$  и  $P'$  — концы одного и того же диаметра сферы).

Отвлекаясь от «метеорологического» смысла функций  $f$  и  $g$ , сформулируем теорему в общем виде:

**Теорема Борсука — Улама\***. Если функции  $f$  и  $g$  определены и непрерывны на сфере  $S$ , то на этой сфере найдутся диаметрально противоположные точки  $P_0$  и  $P'_0$ , в которых  $f(P'_0) = f(P_0)$  и  $g(P'_0) = g(P_0)$ .

Введем две функции  $F(P) = f(P') - f(P)$  и  $G(P) = g(P') - g(P)$ . Обе они непрерывны на  $S$  и обладают свойством антисимметрии:  $F(P') = -F(P)$ ,  $G(P') = -G(P)$ , так как, например,  $F(P') = f((P')') - f(P') = f(P) - f(P') = -F(P)$ . Для точек  $P_0 \in S$ , в которых  $f(P'_0) = f(P_0)$ ,  $g(P'_0) = g(P_0)$ , и только для таких точек  $F(P_0) = 0$  и  $G(P_0) = 0$ .

Следовательно, теорема Борсука — Улама вытекает из следующей теоремы:

**Теорема об общем нуле.** Если функции  $F$  и  $G$  непрерывны на сфере  $S$  и обе обладают свойством антисимметрии, то на сфере  $S$  найдется точка  $P_0$ , в которой обе функции равны нулю:  $F(P_0) = G(P_0) = 0$ .

### Теорема о нулях векторных полей

Теорема о нуле дает достаточные условия, при выполнении которых функция, непрерывная на отрезке, имеет на отрезке «нуль». Сейчас будет рассмотрена теорема, дающая признак существования общего «нуля» у двух функций, непрерывных на круге.

Пусть каждой точке  $Q$  некоторого плоского множества  $K$  (у нас это чаще всего будет круг) поставлен в соответствие некоторый вектор  $\vec{a}(Q)$ , лежащий в той же плоскости. В этом

случае говорят, что на множестве  $K$  задано *двумерное векторное поле* (рис. 2). Вектор в плоскости задается с помощью двух координат, поэтому задание двумерного векторного поля равносильно заданию двух функций:  $\vec{a}(Q) = (x(Q); y(Q))$ .

Векторное поле называется *непрерывным в точке*  $Q_0$ , если в этой точке непрерывны обе функции  $x(Q)$ ,  $y(Q)$ ; поле *непрерывно на данном множестве*, если оно непрерывно в каждой его точке. Векторное поле называется *вырожденным* в множестве  $K$ , если для некоторой точки  $Q_0 \in K$  вектор  $\vec{a}(Q_0)$  — нулевой. Нам нужны достаточные условия вырожденности непрерывного на круге векторного поля.

Мы сначала дадим векторное истолкование теоремы о нуле. На прямой вектор задается одной координатой. Поэтому задание на отрезке функции можно истолковать как задание *одномерного векторного поля* (состоящего из векторов, которые расположены на одной прямой), и теорему о нуле можно сформулировать так:

**Теорема о нуле одномерного поля.** Если на отрезке задано непрерывное одномерное векторное поле, причем на концах отрезка соответствующие векторы имеют противоположные направления, то это поле вырожденное (рис. 3, а).

На случай двумерного поля эта теорема обобщается следующим образом:

**Теорема о нуле двумерного поля.** Если на круге задано непрерывное двумерное векторное поле, причем в любых диаметрально противоположных точках его окружности соответствующие векторы имеют противоположные направления, то это поле вырожденное (рис. 3, б).

Как и одномерная теорема о нуле, эта теорема доказывается средствами, выходящими за рамки школьного курса. Но в то время как в теореме о нуле одномерного поля это компенсировалось наглядностью, о двумерной теореме этого нельзя сказать. Поэтому мы приведем «правдоподобное рассуждение», которое, мы надеемся, убедит читателей в справедливости этой теоремы.

\* Карол Борсук (род. в 1915 г.) — польский математик, Станислав Улама (род. в 1909 г.) — американский математик.



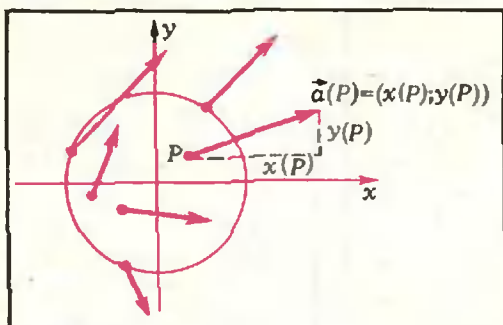


Рис. 2.

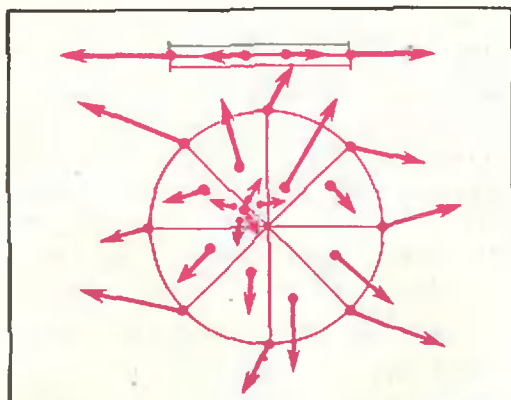


Рис. 3.

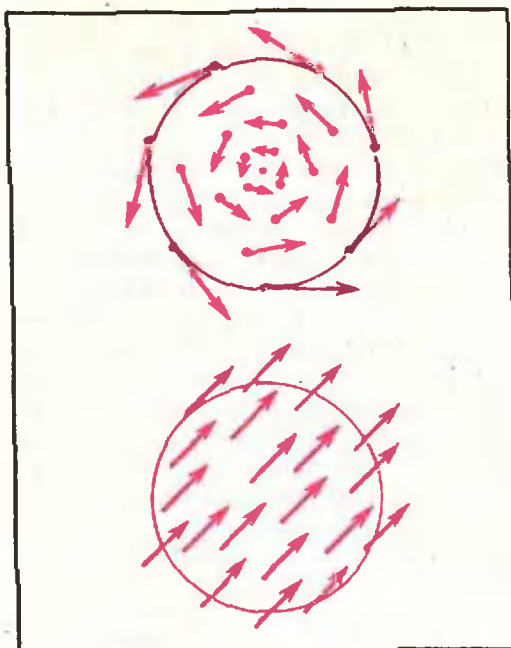


Рис. 4.

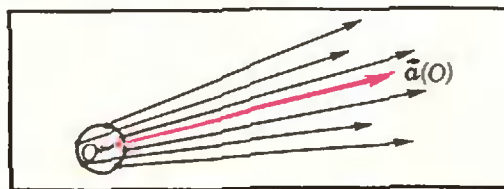


Рис. 5.

Пусть  $O$  — центр круга  $K$ ,  $r$  — его радиус. Граничную окружность круга  $K$  обозначим через  $C$ , а через  $C_\varepsilon$  обозначим концентрическую окружность радиуса  $\varepsilon r$  ( $C = C_1$ ). Пусть  $\vec{a}$  — непрерывное векторное поле на  $K$ . Если  $\vec{a}(Q) \neq 0$  для всех  $Q \in C_\varepsilon$ , то при движении  $Q$  по  $C_\varepsilon$  вектор  $\vec{a}(Q)$  будет как-то поворачиваться. Обозначим через  $v(C_\varepsilon)$  количество оборотов против часовой стрелки, которое совершает вектор  $\vec{a}(Q)$ , приложенный к фиксированной точке  $I$ , когда точка  $Q$  пробегает окружность  $C_\varepsilon$  один раз против часовой стрелки\*. Целое число  $v(C_\varepsilon)$  может быть положительным, нулем или отрицательным. Уточним, что если в процессе движения  $Q$  по некоторой дуге окружности  $C_\varepsilon$  вектор  $\vec{a}(Q)$  сделает несколько оборотов против часовой стрелки и столько же оборотов по часовой стрелке, то при подсчете  $v(C_\varepsilon)$  эти обороты «взаимно уничтожаются». Советуем читателю найти  $v(C)$  для полей, показанных на рисунке 4 (поле скоростей вращающегося круга и поле, образованное параллельным переносом).

Пусть  $\vec{a}(Q)$ ,  $Q \in K$  — векторное поле, удовлетворяющее условиям теоремы. Рассуждая от противного, предположим, что  $\vec{a}(Q) \neq 0$  для всех  $Q \in K$ . Тогда, в частности,  $\vec{a}(Q) \neq 0$ . В силу непрерывности поля, вблизи  $O$  все векторы  $\vec{a}(Q)$  мало отличаются по направлению от  $\vec{a}(O)$ . Значит, при малом  $\varepsilon_0 > 0$  имеем  $v(C_{\varepsilon_0}) = 0$  (см. рис. 5 — так как на  $C_{\varepsilon_0}$  векторы направлены «почти так же», как  $\vec{a}(O)$ , вектор  $\vec{a}(Q)$  не совершает ни одного целого оборота, когда  $Q$  обегает  $C_{\varepsilon_0}$ ). Будем теперь постепенно увеличивать  $\varepsilon$  до крайнего значения  $\varepsilon = 1$ . Так как  $\vec{a}(Q) \neq 0$  всюду, число  $v(C_\varepsilon)$  определено для всех значений  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , то есть  $v(C_\varepsilon)$  — всюду определенная на  $(0, 1]$  функция от  $\varepsilon$ . Эта функция непрерывна (так как наше поле непрерывно) и принимает лишь целые значения. Но целочисленная функция изменяется толь-

\* Читателям, ознакомившимся со статьей С. В. Матвеева в «Кванте», 1983, № 4, советуем сравнить это число с «инвариантом  $V$ ».

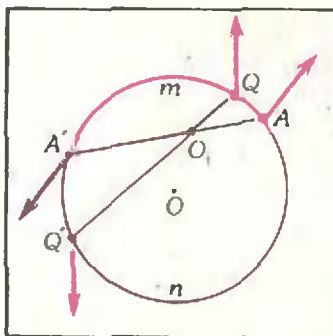


Рис. 6.

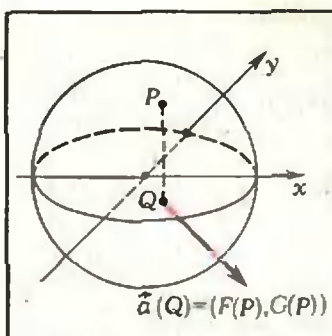


Рис. 7.

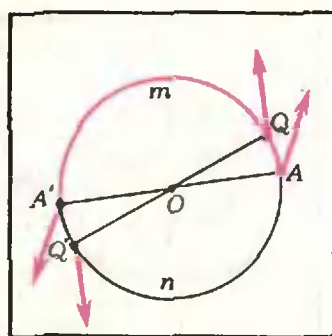


Рис. 8.

ко скачками (по величине  $\geq 1$ ), она либо разрывна, либо постоянна. Значит, в нашем случае  $v(C_\varepsilon) = \text{const}$ , откуда  $v(C) = v(C_\varepsilon) = 0$ .

Возьмем теперь на окружности  $S$  некоторую точку  $A$  и диаметрально противоположную ей точку  $A'$  (рис. 6). Так как направления векторов  $\vec{a}(A)$  и  $\vec{a}(A')$  противоположны, при движении точки  $Q$  по полуокружности  $AmA'$  от точки  $A$  до точки  $A'$  вектор  $\vec{a}(Q)$  совершает нечетное число полуоборотов. При дальнейшем движении точки  $Q$  по полуокружности  $A'nA$  от  $A'$  к  $A$  вектор  $\vec{a}(Q)$  совершит такое же (и притом в том же направлении) число полуоборотов. Следовательно,  $v(C)$  есть нечетное число, что противоречит доказанному равенству  $v(C) = 0$  и завершает наше рассуждение.

#### Доказательство теоремы об общем нуле

Итак, пусть на сфере  $S$  заданы непрерывные функции  $F$  и  $G$ , обладающие свойством антисимметрии  $F(A') = -F(A)$ ,  $G(A') = -G(A)$ .

Проведем через центр  $O$  сферы  $S$  какую-либо плоскость. Круг, получившийся в сечении, обозначим через  $K$ , а его окружность — через  $C$ . Введем в секущей плоскости какую-нибудь прямоугольную систему координат с началом  $O$  и каждой точке  $Q \in K$  поставим в соответствие вектор  $\vec{a}(Q)$  с координатами  $F(P)$  и  $G(P)$ , где  $P$  — та точка верхней полусферы, которая проектируется в точку  $Q$  (рис. 7). Предоставляем читателю убедиться в том, что полученное векторное поле непрерывно на  $K$ . В силу свойства антисимметрии на сфере

функций  $F$  и  $G$ , для всех  $Q \in C$  будем иметь

$$\vec{a}(Q) = -\vec{a}(Q')$$

По теореме о нуле двумерного поля найдется точка  $Q_0 \in K$ , в которой  $\vec{a}(Q_0) = \vec{0}$ . Это значит, что  $F(P_0) = 0$ ,  $G(P_0) = 0$ , где  $P_0$  — точка сферы, проектирующаяся в точку  $Q_0$ . Теорема доказана.

#### Одно географическое следствие

Из теоремы Борсука — Улама вытекает одно следствие, огорчительное для географов. Положение точки на земном шаре принято указывать с помощью географических координат — широты  $\theta$  и долготы  $\varphi$ . Их можно рассматривать как функции точек земной сферы. В этой системе координат особое положение занимают полюсы: широта у каждого из них  $90^\circ$  (северная или южная), а долгота можно приписать любую. Поэтому, если двигаться, скажем, к северному полюсу по одному меридиану, а достигнув его, продолжить движение по любому другому меридиану, то при этом непрерывном движении широта будет изменяться непрерывно, а долгота — испытает скачок. Если условиться приписывать знак «плюс» восточной долготы и знак «минус» — западной, то долгота испытывает скачок и при переходе из западного полушария в восточное через меридиан, являющийся антиподом гринвичского меридиана. Возникает вопрос: нельзя ли на всей поверхности сферы ввести координаты так, чтобы они были непрерывными функциями соответствующей точки сферы? При этом, естественно, должно быть разных точек с одинаковыми парами координат.

Согласно теореме Борсука — Улама, это невозможно. Действительно, если бы на сфере  $S$  были бы заданы непрерывные координаты  $x(P)$  и  $y(P)$  ( $P \in S$ ), согласно этой теореме, нашлись бы даже антиподы  $P_0, P'_0 \in S$ , в которых  $x(P) = x(P'_0)$ ,  $y(P_0) = y(P'_0)$ .

### Некоторые обобщения

Если внимательно проанализировать ход доказательства теоремы «о лошади», можно обнаружить что не так уж важно то обстоятельство, что точки  $L$  и  $L'$  — диаметрально противоположные. Все рассуждения сохраняют силу, например, тогда, когда вместо центра  $O$  взять произвольную внутреннюю точку  $O_1$  круга и под  $L$  и  $L'$  понимать концы хорды, проходящей через  $O_1$ . Аналогично можно поступить и с теоремой о нуле двумерного поля, и с теоремой Борсука — Улама (рис. 8). Здесь важно то, что при новом определении точки  $P'$  сохраняется свойство  $(P')' = P$ .

Всякое непрерывное отображение  $P \rightarrow P'$ , обладающее этим свойством, называется инволюцией. Советский математик А. Фет, используя тонкие и сильные средства топологии, обнаружил, что теорема Борсука — Улама (даже в ее  $n$ -мерном варианте) остается в силе, если на сфере  $S$  задана произвольная инволюция  $P \rightarrow P'$ . Вот точная формулировка этого утверждения для трехмерного пространства:

Пусть на сфере  $S$  задана произвольная инволюция  $P \rightarrow P'$ . Для каждой пары непрерывных на  $S$  функций  $f(P)$  и  $g(P)$  найдется точка  $P_0 \in S$  такая, что  $f(P'_0) = f(P_0)$ ,  $g(P'_0) = -g(P_0)$ .

\* \* \*

Читателю, у которого появилось желание более подробно ознакомиться с основными понятиями топологии, мы рекомендуем прочесть превосходно написанную популярную книгу Н. Стинрода и У. Чинна «Первые понятия топологии» (М., Мир, 1967) \*). В этой книге имеется более полное и строгое доказательство теоремы Борсука — Улама, а также ряд других «аппетитных» теорем (например, «теорема о блинах», «теорема о разрезании сэндвича с ветчиной»).

\*) См. также книгу В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича «Наглядная топология» (М., Наука, 1982).

### Наш календарь



### Законы электролиза

В самом начале 1833 года Фарадей сообщил Лондонскому Королевскому обществу о проведенных им экспериментах, впервые доказавших тождественность различных видов электричества — «обыкновенного», возникающего в результате трения, гальванического, термоэлектрического, электрического, получаемого индукционным способом, и так называемого животного электричества (обнаруженного у некоторых рыб и морских животных). Суть доказательства состояла в демонстрации одинаковости «действий», производимых электричеством различного происхождения.

В числе прочих действий (таких, например, как тепловое, физиологическое или магнитное) Фарадей исследовал и химическое действие. Это исследование привело его к выводу, получившему впоследствии название первого закона Фарадея для электролиза: химическое действие электрического тока прямо пропорционально абсолютному количеству проходящего электричества (естественно, что формулировка Фарадея несколько отличается от современной). Закон был сформулирован на основе целой серии тщательно продуманных и мастерски проведенных опытов, в ходе которых Фарадей открыл еще один закон, называемый теперь вторым законом Фарадея: электрохимические эквиваленты соответствуют химическим эквивалентам.

Писать отчет об этих экспериментах Фарадей закончил 31 декабря 1833 года, а опубликовал его уже в 1834 году. Вот почему иногда пишут, что законы Фарадея были открыты в 1833, а иногда — в 1834 году.

Установить точные количественные законы электролиза в те времена было делом не простым. Фарадей сумел это сделать, во многом благодаря изобретенному им прибору — вольтэлектрометру, который впервые позволил измерить количество электричества.

Заметим также, что именно при описании этих исследований Фарадей ввел в физику такие привычные и необходимые для нас сейчас термины, как электролит, электролиз, анод, катод, катион и т. д.

Помимо того, что законы Фарадея легли в основу электрохимии, они сыграли очень важную роль в истории развития физики: впервые навели на мысль о дискретной природе электричества, о существовании «атома электричества» (по-современному — электрона).

Б. Е. Явлов

# Что случилось с лампочкой?

Кандидат физико-математических наук  
А. Н. ПЕГОЕВ

Конечно, перегорание лампочки — событие мелкое. Пожалуй, даже слово «событие» здесь кажется не совсем уместным. Однако разговор о том, почему и как разрушаются нити в лампах накаливания, вполне достоин внимания.

Наша промышленность выпускает миллиарды ламп в год. Прослужив по несколько сотен или тысяч часов, все они перегорают, вызывая у одних легкую досаду, а у других удивление и любопытство. Иногда вид перегоревшей лампочки озадачивает даже опытного электрика.

Но прежде чем говорить о перегорании ламп, несколько слов об их устройстве. Главная деталь лампы (рис. 1) — тело накаливания. Обычно это вольфрамовая нить в форме спирали или двойной спирали. Концы нити соединены с концами вводов. Вводы средней частью закреплены в стеклянной лопатке. Нить поддерживается вводами и проволочными держателями, последние впаяны в стеклянный штенгель. Эта конструкция размещается в стеклянной колбе. К колбе приклеен цоколь, к контактам которого припаяны наружные концы вводов. Их диаметр несколько меньше, чем диаметр внутренней части вводов. Внутри цоколя находится носик — запаянный конец стеклянной трубочки, через которую откачивается воздух из колбы. В некоторых видах ламп колба наполняется инертным газом (аргоном, криптоном), иногда с добавлением галогенов.

Нить накаливания — самый ненадежный элемент лампы. Ток, протекающий через нить, нагревает ее почти до 3000 К. Повышение напряжения на 15% от номинального приводит к быстрому разрушению нити. Даже повышение напряжения на 1% снижает срок ее службы на 15%, хотя и повышает светотдачу на 4%.

Как уже говорилось, вид перегоревшей лампочки может вызвать удивление, а иногда может и озадачить. Выделим по внешним признакам несколько видов разрушения ламп, сформулируем соответствующие вопросы, а затем и ответим на них.

Жизнь большинства ламп заканчивается после длительного горения. В последнее мгновение свет мерцает, может измениться его цвет, иногда слышится тихое гудение, и нить рывается.

**Вопрос 1:** почему после длительной эксплуатации разрушается небольшой участок нити, тогда как остальная часть нити еще работоспособна?

В быту до четверти ламп перегорает в момент включения. Сразу после замыкания цепи лампа ярко вспыхивает и гаснет. Характерно, что разрушается небольшой участок нити, обычно около ввода.

**Вопрос 2:** почему в момент включения, когда температура нити еще не достигла рабочего значения, возрастает вероятность перегорания нити?

Иногда перегорание нити при включении сопровождается вспышкой в цоколе. При этом перегорает один из вводов в наружной его части, а на стекле колбы осаждается испарившийся металл. Колба может отклеваться от цоколя и повис-

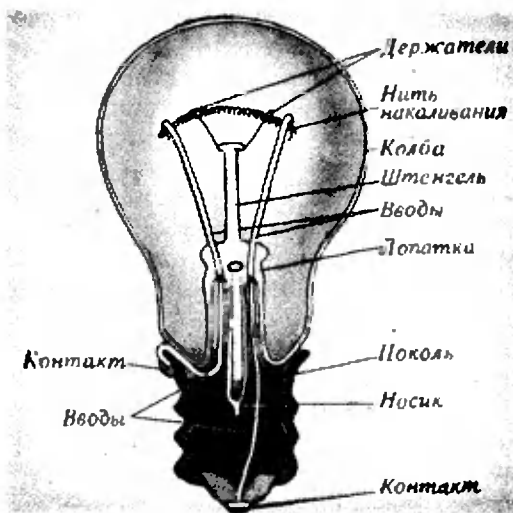


Рис. 1. Лампа накаливания в разрезе.



Рис. 2. Одновременное разрушение нити и ввода подобно одновременному разрыву тонкого шнурка и связанной с ним прочной веревки.

нуть на уцелевшем вводе. (В этом случае можно вывинтить цоколь из патрона, захватив край цоколя концами бокорезов с изолированными ручками.) Такая картина повстине не может не удивить. Во-первых, электрическая цепь разрушилась в двух местах — нить и ввод. Во-вторых, перегорел ввод, у которого ток плавления значительно больше, чем у нити (это видно хотя бы из того факта, что в рабочем режиме один и тот же ток раскаляет нить и почти не нагревает ввода). Парадокс здесь такой же, как будто мы потянули за слабый шнурок и порвали его, но при этом порвалась еще и прочная веревка, к которой привязав шнурок (рис. 2).

**Вопрос 3:** по какой цепи протекает ток, разрушающий ввод?

В некоторых случаях (это касается, в основном, мощных ламп) при включении лампы расплавляется значительная часть нити накаливания. Капли вольфрама проплавливают колбу лампы (а иногда и стеклянный плафон), стекло трескается и с грохотом падает. Застывшие капли вольфрама, их обугленные следы, нерасплавленные кусочки нити можно найти на предметах, находившихся под лампой.

**Вопрос 4:** почему при перегорании лампы ток возрастает настолько, что может расплавиться значительный участок нити?

Желающие могут попытаться самостоятельно ответить на эти вопросы и лишь после этого прочитать приведенные ниже ответы.

\* \* \*

**Ответ на вопрос 1.** Причину разрушения малого участка нити естественно искать в том, что нить не может быть абсолютно однородной. Представим нить как последовательное соединение небольших участков, изображенных на схеме в виде резисторов с сопротивлением  $R_i$  каждый (рис. 3).

Электрическое сопротивление участка нити определяется его длиной  $l_i$ , диаметром  $d_i$  и удельным сопротивлением материала  $\varrho$ :  $R_i = 4\varrho l_i / (\pi d_i^2)$ . Выберем длины участков одинаковыми и будем считать одинаковыми удельные сопротивления всех участков, тогда различие в сопротивлениях будет связано только с различием в диаметрах участков. Пусть по нити протекает ток  $I$ , который определяется приложенным к нити напряжением  $U$  и сопротивлением нити  $R$  (то есть суммой сопротивлений всех участков):  $I = U/R$ . На каждом участке выделяется мощность  $P_i = I^2 R_i$ . При установившемся тепловом режиме эта мощность расходуется на световое и тепловое излучение, а также на отвод тепла по соседним участкам и вводам и через газ в колбе.

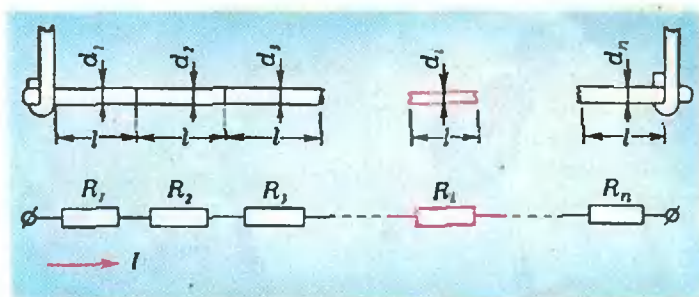


Рис. 3. Разделенная на отдельные участки нить накаливания и ее эквивалентная схема.

Вследствие неоднородности нити по толщине всегда найдется участок, диаметр которого наименьший. Этот участок будет обладать наибольшим сопротивлением, на нем выделяется наибольшая мощность. В то же время излучение тепла с такого участка ослаблено, так как площадь его поверхности минимальна. В результате данный участок приобретает наибольшую температуру. Росту температуры противодействуют потери тепла, связанные с излучением и теплопроводностью (чем больше температура, тем больше тепла излучается и передается с помощью теплопроводности). Поэтому установившееся значение температуры слабого участка определяется совместными действиями всех этих факторов.

Добавим, что с ростом температуры увеличивается удельное сопротивление проводника. Это еще повышает сопротивление, выделяемую мощность, а следовательно, и температуру участка. Скорость испарения вольфрама тоже сильно увеличивается с ростом температуры. Поэтому участок нити с наименьшим диамет-

ром теряет металл с поверхности с наибольшей скоростью. Другими словами, уменьшение диаметра приводит к увеличению скорости уменьшения диаметра (такие процессы называются лавнообразными). В результате температура слабого участка повышается еще больше и достигает точки плавления вольфрама — нить разрушается.

Заметим, что на температуру слабого участка нити влияют также дефекты структуры материала нити (изменяется удельное сопротивление и теплопроводность, последнее изменяет условия передачи тепла к соседним участкам) и особенности поверхности нити (что изменяет излучательную способность участка). Однако эти факторы играют гораздо меньшую роль, чем неоднородность нити по толщине.

**Ответ на вопрос 2.** Примем во внимание, что удельное сопротивление многих чистых металлов, в том числе и вольфрама, пропорционально абсолютной температуре:  $\rho_2/\rho_1 = T_2/T_1$ . Если комнатная температура  $T_1$  около 300 К, а рабочая темпе-

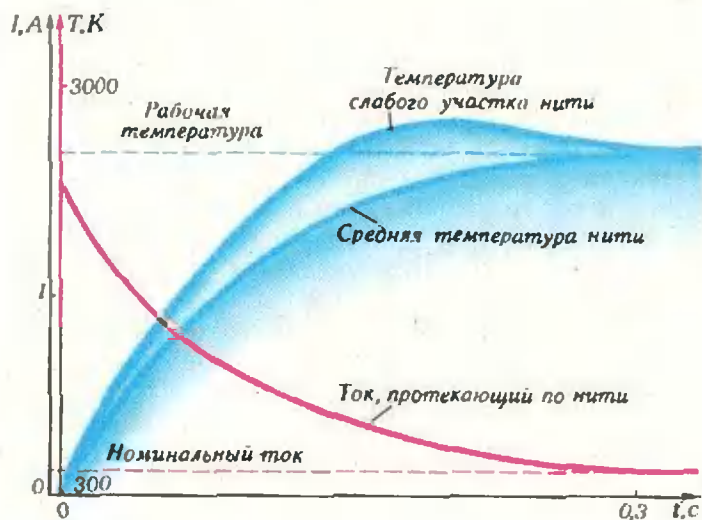


Рис. 4. Примерные графики изменения со временем (после включения лампы) средней температуры нити, температуры ее слабого участка и тока, протекающего по нити.

ратура нити  $T_2$  почти 3000 К, то, сразу после включения сопротивление нити приблизительно в 10 раз ниже, чем в разогретом состоянии. Следовательно, в начальный момент ток, протекающий через нить, превышает номинальное значение почти в 10 раз (рис. 4). Затем по мере разогрева нити сила тока уменьшается.

Само по себе повышенное значение тока не разрушает нить, но создает предпосылки для временного перегрева отдельных ее участков. Действительно, слабый участок нити с уменьшенным диаметром, как мы уже выяснили, обладает повышенным сопротивлением, на нем выделяется повышенная мощность. В неустойчивом режиме мощность расходуется, помимо излучения и теплоотвода, на нагрев нити. Поскольку теплоемкость слабого участка понижена по сравнению с другими участками, а мощность повышена, этот участок разогревается быстрее, чем остальные. Это, в свою очередь, приводит к увеличению сопротивления слабого участка и к дополнительному ускорению разогрева. В результате его температура достигает рабочего уровня раньше, чем разогреется вся нить. В этот момент ток еще превышает номинальное значение, поэтому слабый участок на некоторое время перегревается (см. рис. 4). Этого может оказаться достаточно, для того чтобы произошло испарение вольфрама с поверхности нити и нить в этом месте уменьшилась в диаметре. С каждым последующим включением ослабление нити прогрессирует, пока, наконец, при очередном включении перегрев не приведет к разрушению слабого участка.

Таким образом, зависимость сопротивления нити от температуры приводит к перегреву и разрушению слабого участка нити в момент включения, когда основная часть нити еще не прогрелась.

Лампам в театральных светильниках, напряжение на которых повышается плавно, такая гибель не угрожает. А мигающие, часто включаемые лампы должны иметь особенно однородные нити или работать с недогревом. Это же касается, например, ламп для светофоров.

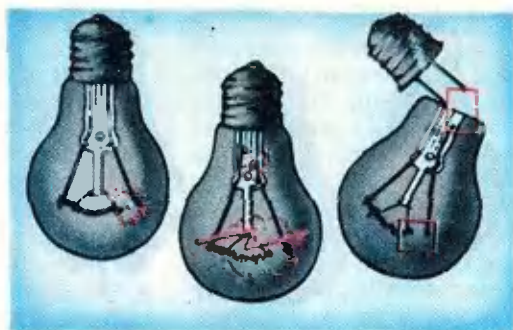


Рис. 5. Последовательные стадии разрушения нити и ввода.

**Ответ на вопрос 3.** Как перегорает нить при включении лампы, мы уже выяснили. А почему при этом может разрушиться ввод? Ясно, что ток, разрушающий ввод, не протекает по нити, так как основная часть нити (с относительно небольшим током плавления) сохранилась. Ясно также, что этот ток протекает внутри лампы, поскольку разрушение ввода явно связано с перегоранием нити.

Оказывается, причина всему — дуговой разряд между вводами внутри колбы. При разрушении слабого участка нити в колбе возникает облачко паров вольфрама, частично ионизированных. Иногда через это облачко происходит пробой, и между вводами зажигается электрическая дуга. Ток дуги и разрушает ввод в его ослабленной наружной части (рис. 5). Следы дуги остаются в виде сизого налета на вводах внутри колбы.

Интересно, что такая неприметная деталь конструкции лампы, как различие диаметров вводов внутри и вне колбы, имеет важное значение. Если бы диаметр наружного участка ввода был таким же или большим, чем диаметр внутреннего участка, то было бы возможным испарение ввода внутри лампы. А это чревато взрывом колбы.

**Ответ на вопрос 4.** Иногда после разрушения слабого участка нити пробой возникает не между двумя вводами, а между одним из вводов и оставшейся частью нити. Это приводит к плавлению большого отрезка нити и возможному взрыву колбы лампы (рис. 6). Можно лишь

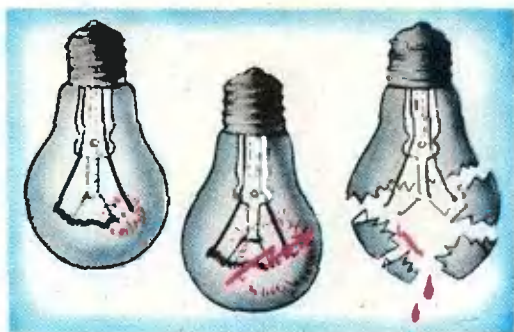


Рис. 6. Последовательные стадии расплавления значительного участка нити.

посоветовать не вставлять под лампой в момент ее включения.

\* \* \*

Рассмотрим еще два необычных и интересных случая перегорания ламп.

Однажды в момент выключения разбилась колба лампы. Оказалось, что при длительном горении нить постепенно провисала под действием силы тяжести, приближалась к дну

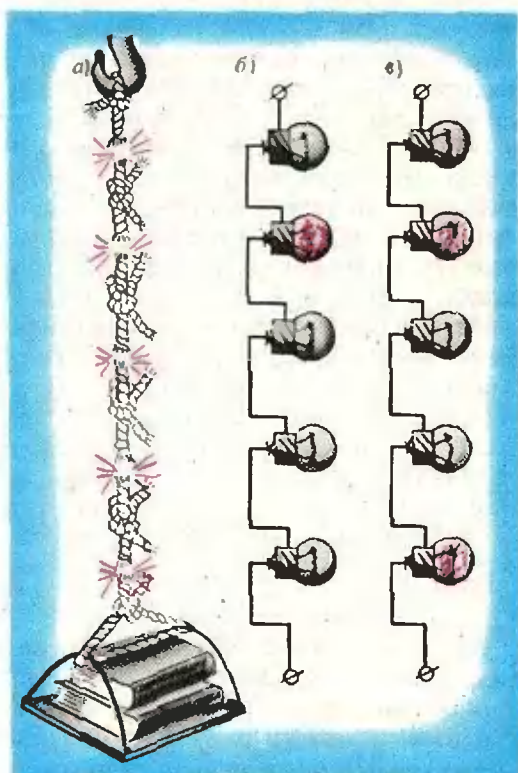


Рис. 7. Шнурок не может разорваться сразу в нескольких местах, а последовательно соединенные лампы могут перегореть одновременно.

колбы и в какой-то момент коснулась его. Это происходило медленно, поэтому нагревание стекла не привело к его разрушению. А вот остывание после выключения было столь быстрым, что стекло в месте соприкосновения с нитью растрескалось. Нить при этом осталась целой.

Теперь расскажем о случае одновременной гибели двадцати ламп, соединенных последовательно. Во времена, когда елочных гирлянд еще не было в преискуранте Деда Мороза, была составлена цепочка из двадцати маломощных автомобильных ламп, рассчитанных на 12 В каждая. При включении в сеть с напряжением 220 В лампы мигнули и перегорели (все двадцать!), при этом в каждой лампе испарился короткий отрезок нити. Это так же удивительно, как если бы при растягивании шнурка, связанного из двадцати кусочков, он порвался бы в двадцати местах — аккуратно между узелками (рис. 7, а).

Почему же одновременно перегорели все лампы? Причиной этого в следующем. Разрушение слабого участка нити в одной из ламп привело к зажиганию электрической дуги между вводами (рис. 7, б). Сопротивление дугового промежутка существенно меньше сопротивления нити в рабочем режиме, в результате этого напряжение на остальных лампах увеличилось. Это ускорило гибель следующей лампы: зажигание дуги в ней (рис. 7, в). Напряжение на уцелевших лампах еще возросло, а эстафета разрушения передавалась от одной лампы к другой, пока в цепи не осталось слабых мест. Так перегорание одной слабой лампы обусловило разрушение остальных. Такие случаи, конечно, редки, но вполне вероятны.





## Необычные кристаллы-генераторы

Кандидат физико-математических наук  
И. В. КАРПОВА

Представьте себе электрическую цепь, состоящую из специально приготовленного полупроводникового кристалла, резистора и источника постоянного напряжения (например, батарейки для карманного фонаря), соединенных последовательно. Оказывается, при определенных условиях в такой цепи могут возбуждаться электрические колебания. Сначала это было предсказано теоретически, а затем и подтверждено экспериментально.

На опыте были обнаружены колебания с амплитудой несколько вольт, частоты колебаний лежали в интервале от  $10^2$  до  $10^7$  Гц. Генерирующий образец представлял собой прямоугольный брусок с размерами граней от нескольких мм до десятков мкм, вырезанный из монокристалла германия или кремния.

Характерно, что колебания возникают при самых обычных условиях: при комнатной температуре, без дополнительного давления, в отсутствие силь-

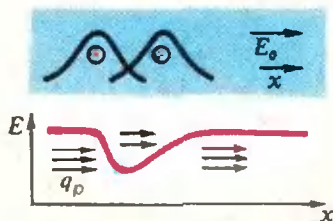
ных электрических или магнитных полей. Все особенности связаны только с составом кристалла. Какие же это особенности?

Известно, что в полупроводниках заряды переносятся двумя типами носителей: электронами и дырками, отличающимися друг от друга, в первую очередь, знаком заряда и направлением упорядоченного движения в электрическом поле. Электроны и дырки могут находиться в двух состояниях — свободном и связанном. Переход из первого состояния во второе называют рекомбинацией. При этом переходе носители зарядов захватываются на так называемые ловушки, которыми обычно служат атомы примесей или дефекты кристаллической решетки полупроводника. Ловушки, как правило, заряжены, поэтому понятно, что электроны и дырки захватываются одной и той же ловушкой с разными вероятностями. Следовательно, и время, в течение которого они участвуют в переносе тока (время жизни), тоже не одно и то же. Так вот, если в кристалл введены подходящие примеси, такие, что время жизни электронов и дырок, а также их концентрации удовлетворяют определенным соотношениям, то в кристалле может произойти генерация электрических колебаний. Попробуем объяснить это.

Предположим, что где-то в полупроводнике случайно возникла флуктуация (неоднородность) плотности электронов. Так как полупроводник в целом электрически нейтрален, возникший отрицательный заряд должен быть скомпенсирован положительным зарядом соответствующей флуктуации дырок. Пусть введенные в

кристалла ловушки таковы, что практически все избыточные дырки будут связанными, а электроны — свободными.

Если к образцу приложить внешнее электрическое поле напряженности  $E_0$ , оно поляризует флуктуации дырок и электронов так, что в результате суммарное электрическое поле имеет провал



(см. рисунок). Рассмотрим потоки свободных дырок, втекающих в область провала поля и вытекающих из нее. Поток дырок, то есть число дырок, проходящих каждую секунду через единицу площади сечения, перпендикулярного направлению движения дырок, равен  $q_p = n_p v$ , где  $n_p$  — концентрация дырок,  $v$  — их скорость. В однородном кристалле концентрация свободных дырок всюду одна и та же, а скорость зависит от поля — она пропорциональна его напряженности (аналогично скорости направленного движения свободных электронов в металле). На левом склоне провала поля втекающий поток дырок больше вытекающего, поэтому дырки будут накапливаться на левом склоне, то есть застревать на ловушках. На правом склоне провала поля вытекает дырок меньше, чем вытекает, то есть здесь дырки будут выбрасываться с ловушек. Таким образом, флуктуация дырок будет перемещаться влево.

При определенных условиях может оказаться,

(Окончание см. на с. 40)



## Вокруг биссектрисы

Кандидат физико-математических наук  
И. Ф. ШАРЫГИН

В этой статье собраны некоторые геометрические факты, прямо или косвенно связанные с биссектрисой треугольника. Среди них читатель найдет и несложные, но часто используемые «леммы», и более солидные и трудные «теоремы» и просто красивые «задачи». Но мы не станем их никак классифицировать, а просто будем нумеровать в порядке появления в статье. Утверждения, которые приводятся в статье без доказательства, автоматически включаются в число упражнений. Впрочем, и имеющиеся в статье доказательства мы постарались изложить по возможности лаконично, чтобы оставить читателям простор для размышлений.

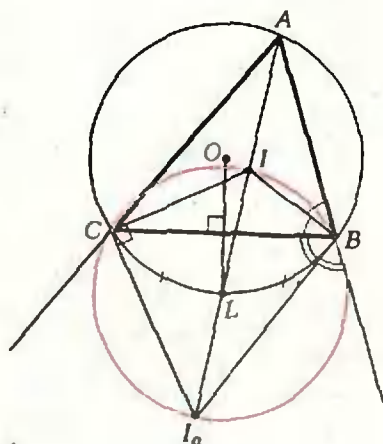


Рис. 1.

Это должен знать каждый

Напомним прежде всего некоторые общепринятые обозначения:  $ABC$  — данный треугольник,  $S_{ABC}$  — его площадь,  $|BC|=a$ ,  $|CA|=b$ ,  $|AB|=c$ ,  $2p=a+b+c$ ,  $O$  и  $R$  — соответственно, центр описанной окружности и ее радиус,  $I$  и  $r$  — центр и радиус вписанной окружности. Кроме того, треугольник имеет три внешние окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Их центры и радиусы будем обозначать, соответственно,  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  ( $I_a$  — центр внешней окружности, касающейся стороны  $BC$  и продолжений сторон  $AB$  и  $AC$ ,  $r_a$  — ее радиус).

Все другие обозначения будут разъясняться в соответствующих местах.

(1) Пусть биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ . Тогда

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BA|}{|AC|} = \frac{c}{b}.$$

(2) Пусть биссектриса внешнего угла при вершине  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $A_2$ . Тогда

$$\frac{|BA_2|}{|A_2C|} = \frac{|BA|}{|AC|} = \frac{c}{b}.$$

(3)  $S_{ABC} = pr$ .

(4)  $S_{ABC} = (p-a)r_a$ .

(5) Если  $M$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $AB$ , то  $|AM| = p-a$ . (Аналогично опреде-

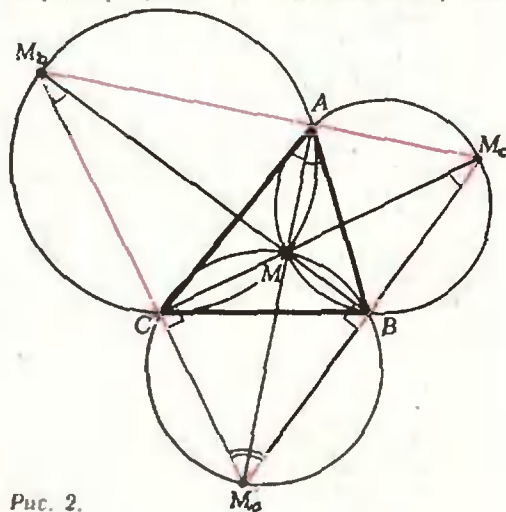


Рис. 2.

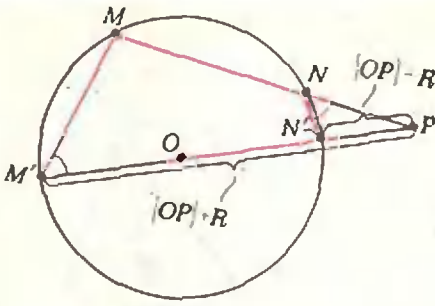


Рис. 3. а.

ляются и другие отрезки, на которые стороны треугольника делятся точками касания со вписанной окружностью.)

(6) Если  $M$  — точка касания вневписанной окружности с центром  $I_a$  с прямой  $AB$ , то  $|AM| = r$ .

(7) Вершины  $B$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $II_a$ ; центр  $I$  этой окружности лежит на описанной окружности (рис. 1).

Таким образом, центр вписанной окружности  $I$  обладает следующим свойством: прямые  $AI$ ,  $BI$  и  $CI$  (то есть биссектрисы) проходят через центры описанных окружностей треугольников  $BIC$ ,  $CIA$ ,  $AIB$  соответственно. Верна и обратная теорема.

(8) Если прямые  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  проходят через центры описанных окружностей треугольников  $BMC$ ,  $CMA$  и  $AMB$ , то  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

В самом деле, пусть  $M_a, M_b, M_c$  — точки пересечения прямых  $AM, BM$  и  $CM$  с соответствующими окружностями, отличные от  $M$  (рис. 2). Тогда  $MM_a, MM_b$  и  $MM_c$  — диаметры этих окружностей, поэтому  $M_aA, M_bB$  и  $M_cC$  — высоты треугольника  $M_aM_bM_c$ . Отсюда получаем  $\widehat{BAM} = \widehat{BM_cM} = 90^\circ - \widehat{BM_aC} = \widehat{CM_bM} = \widehat{CAM}$ , то есть  $M$  лежит на биссектрисе угла  $A$  и, аналогично, на биссектрисах углов  $B$  и  $C$ .

**Расстояния между центрами «замечательных окружностей».**

(9)  $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$  (формула Эйлера).

(10)  $|OI_a|^2 = R^2 + 2Rr_a$ .

(11)  $|II_a|^2 = 4R(r_a - r)$ .

Для доказательства первых двух формул напомним, что если  $M$  и  $N$  —

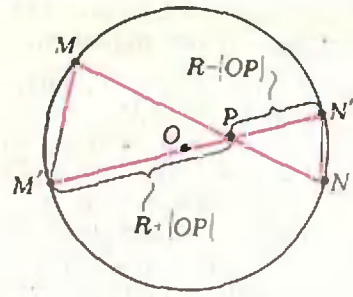


Рис. 3. б.

точки пересечения произвольной прямой, проходящей через данную точку  $P$ , с окружностью радиуса  $R$  с центром  $O$ , то  $|PM| \cdot |PN| = |R^2 - |OP|^2|$ . (Это вытекает из подобия треугольников  $PMM'$  и  $PNN'$ , где  $M'$  и  $N'$  — точки пересечения прямой  $OP$  с окружностью; рис. 3, а и б.) Отсюда следует, что  $R^2 - |OI|^2 = |IA| \cdot |IL|$ , где  $L$  — точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с описанной окружностью (рис. 4). Но  $|IA| = r / \sin(\hat{A}/2)$ , а  $|IL| = |LB| = 2R \times \sin(\hat{A}/2)$  по утверждению (7), поэтому  $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$ . Аналогично,  $|OI_a|^2 - R^2 = |I_aL| \cdot |I_aA| = 2R \times \sin(\hat{A}/2) \times r_a / \sin(\hat{A}/2) = 2Rr_a$ . Наконец,  $|II_a|^2 = (2|IL|) \cdot (|I_aA| - |IA|) = 4R \sin(\hat{A}/2) \cdot \frac{r_a - r}{\sin(\hat{A}/2)} = 4R(r_a - r)$ .

(12) Точки, симметричные центрам вневписанных окружностей относительно центра описанной окружности, лежат на окружности радиуса  $2R$  с центром  $I$ .

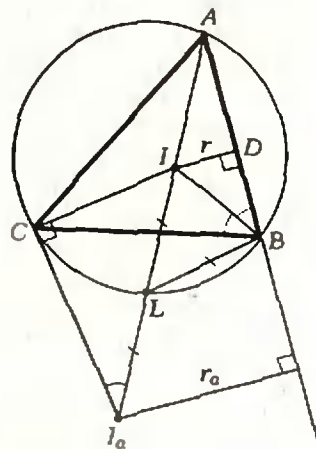


Рис. 4.

**Два экстремальных свойства центра вписанной окружности**

Возьмем внутри треугольника  $ABC$  произвольную точку  $M$ . Существует довольно много неравенств, касающихся расстояний от этой точки до вершин треугольника. Мы рассмотрим два таких неравенства, имеющих отношение к теме статьи.

(13) Обозначим через  $A_1$  точку пересечения прямой  $AM$  с описанной окружностью. Тогда

$$\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} \geq 2r.$$

(14)  $|AM| \sin \widehat{BMC} + |BM| \times \sin \widehat{CMA} + |CM| \sin \widehat{AMB} \leq r.$

В обоих случаях равенство достигается, если  $M$  совпадает с  $I$  — центром вписанной окружности.

Допустим, что наименьшее значение выражения  $f(M) = \frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|}$ , стоящего в левой части неравенства (13), достигается в некоторой точке  $M$  внутри треугольника  $ABC$ . Мы покажем, что  $M=I$ . А поскольку  $f(I) = 2r$  (это следует, например, из подобия прямоугольных треугольников  $VID$  и  $I_0C$  на рисунке 4\*), откуда будет вытекать, что если  $f(M)$  принимает свое наименьшее значение внутри треугольника  $ABC$ , то  $f(M) \geq 2r$ . Выделенное предположение является нетривиальным и очень существенным. Мы обсудим его несколько позже.

Опишем около треугольника  $AMC$  окружность (рис. 5). Все треугольники  $СМА_1$ , получающиеся при перемещении точки  $M$  по ее дуге  $AC$ , подобны между собой (почему?), следовательно, отношение  $|CM|/|A_1M|$  будет для них одним и тем же. Поэтому, если  $M$  — точка минимума величины  $f(M)$ , прямая  $BM$  должна проходить через центр окружности, описанной около треугольника  $AMC$ , иначе мы могли бы уменьшить  $|BM|$ , оставляя постоянным отношение  $|CM|/|A_1M|$ . Пусть теперь  $B_1$  и  $C_1$  — точки пересечения прямых  $BM$  и  $CM$  с окружностью,

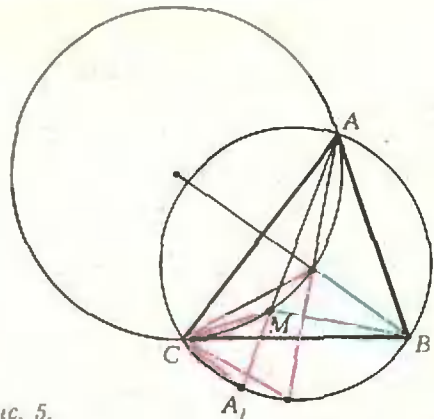


Рис. 5.

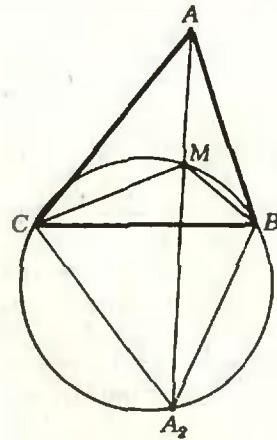


Рис. 6.

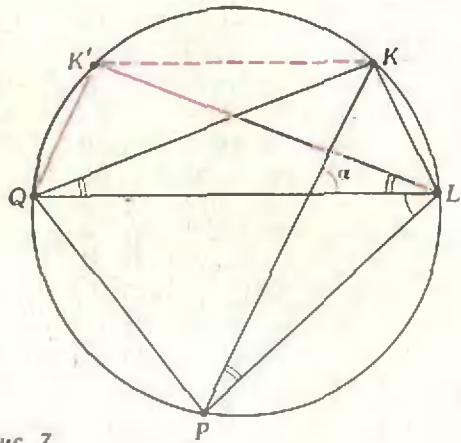


Рис. 7.

описанной около треугольника  $ABC$ , тогда, как мы видели при доказательстве формулы (9),  $|MA| \cdot |MA_1| = |MB| \cdot |MB_1| = |MC| \cdot |MC_1|$  и потому

$$\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} = \frac{|CM| \cdot |AM|}{|B_1M|} = \frac{|AM| \cdot |BM|}{|C_1M|}.$$

Следовательно, прямые  $AM$  и  $CM$  также должны проходить через цент-

\*) Равенство  $f(I) = 2r$  требовалось доказать также в задаче М769, в), решение которой опубликовано в «Кванте» № 2 за этот год.

ры окружностей, описанных около треугольников  $BMC$  и  $AMB$  соответственно, и в силу (8) точка  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

Вернемся к вопросу о достижении наименьшего значения функцией  $f(M)$ . В анализе доказываем, что непрерывная числовая функция, заданная на отрезке, обязательно принимает в некоторых его точках свое наибольшее и наименьшее значение\*). Аналогичная теорема верна и для функций нескольких переменных, например для функций на плоскости; в частности, функция, непрерывная на многоугольнике, всегда достигает на нем наибольшего и наименьшего значения. Однако к нашей задаче эта теорема непосредственно не применима — функция  $f(M)$  не определена в вершинах треугольника  $ABC$ . Более того, ее даже невозможно доопределить в точках  $A, B, C$  так, чтобы она стала непрерывной на всем треугольнике (включая границу)! Но если отрезать от треугольника уголки, мы получим шестиугольник, на котором наша функция уже будет непрерывна и, следовательно, достигает наименьшего значения. Можно показать, что вблизи границы треугольника  $f(M) > 2r$ . Поэтому, если отрезаемые уголки достаточно малы, наименьшее значение  $f(M)$  на шестиугольнике, а значит, и на треугольнике, достигается при  $M=I$  и равно  $2r$ .

Рассмотренное доказательство неравенства (13) относят к *косвенным*, в отличие от так называемых *прямых*, когда непосредственно доказываем, что (в нашем случае)  $f(M) \geq f(I)$  для всех точек  $M$  внутри треугольника  $ABC$ . Косвенные доказательства нужно проводить с известной осторожностью, потому что наибольшее или наименьшее значение функции достигается отнюдь не всегда. За примером далеко ходить не надо: сама функция  $f(M)$  не принимает своего наибольшего значения; читателю предлагается доказать, что  $f(M) < l$ , где  $l$  — длина наибольшей стороны треугольника, для всех точек  $M$  треугольника  $ABC$  (кроме, конечно, вершин), причем величина  $f(M)$  может быть сколь угодно близка к  $l$ .

Перейдем к доказательству неравенства (14). Оно тоже будет косвенным: мы покажем, что точка максимума  $M$  левой части этого неравенства (если она существует!) совпадает с  $I$ .

Опишем около треугольника  $BMC$  окружность и продолжим отрезок

$AM$  до вторичного пересечения с ней в точке  $A_2$  (рис. 6). Применим к четырехугольнику  $BMA_2C$  теорему Птолемея — «сумма произведений противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника равна произведению его диагоналей»:

$$|BM| \cdot |A_2C| + |CM| \cdot |A_2B| = |BC| \cdot |A_2M|.$$

Эту теорему можно доказать, выражая двумя способами площадь четырехугольника: если  $KLPQ$  — вписанный четырехугольник и хорда  $KK'$  параллельна диагонали  $LQ$ , то  $S_{KLPQ} = S_{K'LPQ}$  (рис. 7); в то же время  $2S_{KLPQ} = |KP| \cdot |LQ| \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между диагоналями  $KP$  и  $LQ$ , а  $2S_{K'LPQ} = |K'L| \cdot |LP| \sin \widehat{K'LP} + |K'Q| \cdot |QP| \times \times \sin \widehat{K'QP} = (|KQ| \cdot |LP| + |KL| \cdot |QP|) \times \times \sin \alpha$ , ибо  $\widehat{K'LP} = \alpha$  — см. рис. 7.

Учитывая, что длины хорд одной окружности пропорциональны синусам опирающихся на них углов, получим

$$|BM| \sin \widehat{A_2MC} + |CM| \sin \widehat{A_2MB} = |A_2M| \sin \widehat{BMC},$$

или

$$|BM| \sin \widehat{AMC} + |CM| \sin \widehat{AMB} = |A_2M| \sin \widehat{BMC}.$$

Сопоставляя последнее равенство с неравенством (14), видим, что левая часть неравенства равна

$|AA_2| \sin \widehat{BMC}$ . Значит, прямая  $AM$  должна проходить через центр окружности, описанной около  $BMC$ , поскольку в противном случае, перемещая  $M$  по дуге  $BC$ , мы можем увеличить левую часть неравенства (14). Дальнейшие рассуждения (в том числе и доказательство существования точки максимума) проводятся так же, как и в задаче (13).

Докажите самостоятельно, что если  $M$  совпадает с  $I$ , то  $|AA_2| \sin \widehat{BMC} = r$ ; для этого можно воспользоваться, например, задачами (6) и (7) и тем, что  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \widehat{A}/2$ .

### Когда подводит интуиция

Если у треугольника равны два «однотипных» элемента (например, два угла или две медианы и т. п.), то естественно ожидать, что он будет равнобедренным. Среди задач на

\* См. учебник «Алгебра и начала анализа 9–10», п. 28.

доказательство утверждений такого рода издавна одной из самых трудных задач считается так называемая задача Штейнера—Лемуса.

(15) Доказать, что если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный.

Эта задача широко известна\*), а вот следующая забавная вариация на ту же тему почти неизвестна даже среди любителей геометрии.

(16) Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?

Оказывается, утверждать это, вообще говоря, нельзя! Более точно, пусть  $A_1, B_1, C_1$  — основания биссектрис треугольника  $ABC$ . Если  $|A_1B_1| = |A_1C_1|$ , а треугольник  $ABC$  — не равнобедренный, то его угол  $A$  тупой и  $\cos A$  лежит в интервале  $]-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}]$ , что для самого угла  $A$  соответствует интервалу  $]102^\circ 40'; 104^\circ 28' [$  (значения в градусной мере приближенные). Обратное, для любого угла  $\alpha$  из этого интервала можно указать единственный (с точностью до подобия) неравнобедренный треугольник  $ABC$  с  $\angle A = \alpha$ , для которого  $|A_1B_1| = |A_1C_1|$ . Подробнее решение этой задачи дается в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М., Наука, 1982), с. 157. К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (то есть точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям журнала?

#### Еще 11 задач

(17) Доказать, что биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.

(18) Пусть  $AA'$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Доказать равенства:  $|AA'| =$

$$= \frac{\sqrt{bc - |BA'| \cdot |CA'|}}{b+c} = \frac{2bc \cos(A/2)}{b+c}.$$

(19) Доказать, что высоты треугольника служат биссектрисами треугольника, образованного их основаниями.

(20) Пусть  $M$  и  $N$  — проекции точки пересечения высот треугольника  $ABC$  на биссектрисы внутренних и внешнего углов при вершине  $A$  этого треугольника. Доказать, что прямая  $MN$  делит сторону  $BC$  пополам.

(21) Доказать, что сумма площадей трех треугольничков, вершинами каждого из которых являются три точки касания одной вневписанной окружности со сторонами или продолжениями сторон данного треугольника, равна удвоенной площади этого треугольника, сложенной с площадью треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности с его сторонами.

(22) Пусть  $AA', BB', CC'$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ ,  $L$  и  $K$  — точки пересечения прямых  $AA'$  и  $B'C'$ ,  $CC'$  и  $A'B'$  соответственно. Доказать, что  $BB'$  — биссектриса угла  $L BK$ .

(23) Пусть  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$ . Доказать, что если  $BD$  — биссектриса угла  $ANC$ , то  $AC$  — биссектриса угла  $BMD$ .

(24) В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $B$  пересекает прямую, проходящую через середину  $AC$  и середину высоты, опущенной на  $AC$ , в точке  $M$ ,  $N$  — середина биссектрисы угла  $B$ . Доказать, что биссектриса угла  $C$  является также и биссектрисой угла  $MCN$ .

(25) Через основания биссектрис треугольника  $ABC$  проведена окружность. Рассмотрим три хорды, образованные при пересечении сторон треугольника с этой окружностью. Доказать, что длина одной из этих хорд равна сумме длин двух других.

(26) В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  взяты точки  $K$  и  $L$  так, что  $|AK| = |KL| = |LC|$ . Через точку пересечения прямых  $AL$  и  $CK$  проведена прямая, параллельная биссектрисе угла  $B$ , пересекающая прямую  $AB$  в точке  $M$ . Доказать, что  $|AM| = |BC|$ .

(27) Дад вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Противоположные стороны  $AB$  и  $CD$  при продолжении пересекаются в точке  $K$ , стороны  $BC$  и  $AD$  — в точке  $L$ . Доказать, что биссектрисы углов  $BKC$  и  $BLA$  перпендикулярны и пересекаются на прямой, соединяющей середины  $AC$  и  $BD$ .

\* История этой задачи и одно из решений (возможно, самое короткое) приводятся, например, в книге Г. С. М. Коксетера и С. Л. Грейтнера «Новые встречи с геометрией» (М., Наука, 1978), гл. I, § 5.

## Четыре доказательства теоремы о биссектрисе

Теорема о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника в учебном пособии «Геометрия 6-8» не доказывается, а предлагается в виде задачи (№ 914, с. 232). Эта теорема часто используется, например, при установлении факта пересечения трех биссектрис треугольника в одной точке. Здесь мы дадим сразу несколько ее доказательств.

**Теорема.** Биссектриса  $BD$  внутреннего угла треугольника  $ABC$  делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам  $|BC|$  и  $|BA|$  треугольника.

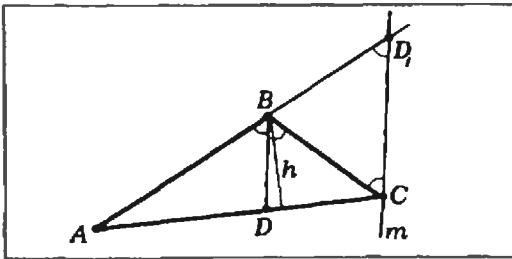


Рис. 1.

Первое доказательство (для 7-го класса).

Проведем через точку  $C$  (рис. 1) прямую  $m$ , параллельную  $(BD)$ . Тогда

$m \cap |AB| = D_1$  и  $\triangle ABD \sim \triangle AD_1C$ ; так как  $\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \widehat{CD_1B} = \widehat{CD_1C}$ , получаем  $|BC| = |BD_1|$  и  $\frac{|AD_1|}{|AB|} =$

$\frac{|AC|}{|AD|}$ ; отсюда последовательно получаем

$$\frac{|AB| + |BC|}{|AB|} = \frac{|AD| + |DC|}{|AD|},$$

$$1 + \frac{|BC|}{|AB|} = 1 + \frac{|DC|}{|AD|},$$

$$\frac{|CB|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AD|},$$

что и требовалось доказать.

Второе доказательство (для 8-го класса).

Имеем (см. рис. 1):

$$\frac{S_{CBD}}{S_{ABD}} = \frac{0,5 \cdot |CB| \cdot |DB| \cdot \sin \frac{B}{2}}{0,5 \cdot |AB| \cdot |DB| \cdot \sin \frac{B}{2}} = \frac{0,5 \cdot |CD| \cdot h}{0,5 \cdot |AD| \cdot h},$$

где  $h$  — длина высоты треугольника  $ABC$ , проведенной из вершины  $B$ . Отсюда

$$\frac{|CB|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AD|}.$$

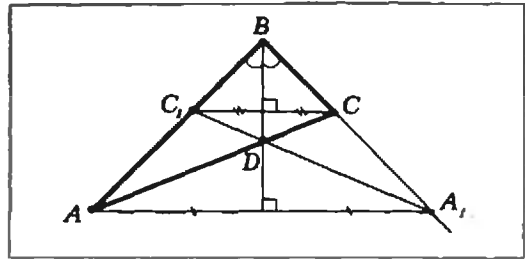


Рис. 2.

Третье доказательство (8 класс). По теореме синусов (см. рис. 1)

$$\frac{\sin \frac{B}{2}}{|CD|} = \frac{\sin \hat{C}}{|BD|}$$

и

$$\frac{\sin \frac{B}{2}}{|AD|} = \frac{\sin \hat{A}}{|BD|},$$

или

$$\frac{\sin \frac{B}{2}}{|CD| \cdot \sin \hat{C}} = \frac{1}{|BD|}$$

и

$$\frac{\sin \frac{B}{2}}{|AD| \cdot \sin \hat{A}} = \frac{1}{|BD|}.$$

Откуда

$$\frac{\sin \frac{B}{2}}{|CD| \cdot \sin \hat{C}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{|AD| \cdot \sin \hat{A}},$$

или

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}},$$

или

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AB|}.$$

Четвертое доказательство (7-8 классы). Выполнив осевую симметрию  $S$  треугольника  $ABC$  относительно  $(BD)$  (рис. 2), получим

$S_{(BD)}(A) = A_1$ ,  $S_{(BD)}(C) = C_1$  и  $S_{(BD)} = B$ .

Тогда  $\triangle CDC_1 \sim \triangle ADA_1$  и  $\triangle CC_1B \sim \triangle AA_1B$  (убедитесь в этом!). Отсюда (учитывая, что  $|AB| = |A_1B|$ )  $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CC_1|}{|AA_1|}$

$$\frac{|CC_1|}{|AA_1|} = \frac{|CB|}{|AB|}.$$

Следовательно,

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AB|}.$$

С. П. Сефибеков

### Объявление

Магазин № 8 Москиги принимает заказы на следующие книги, выпущенные издательством «Наука»:

«Задачи по физике» (Под ред. О. Я. Савченко, 1981, 95 к.),

Каганов М. И., Цу-

керник В. М. «Природа магнетизма» (1982, 30 к.),

Яворский Б. М., Пинский А. А. «Основы физики» — Т. I «Механика. Молекулярная физика. Электродинамика» (3-е изд., перераб., 1981, I р. 20 к.), Т. II

«Колебания и волны. Квантовая физика» (3-е изд., перераб., 1981, I р. 20 к.).

Заказы направлять по адресу: 103050, Москва, К-50, ул. Медведева, I, магазин № 8 Москиги, отдел «Книга — почтой».



### Когда

$$|a + b| = |a| + |b|?$$

Л. Б. ПЕЧЕРСКИЙ

Как известно («Алгебра и начала анализа 9–10», п. 3),

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \quad (1)$$

Из геометрического смысла модуля легко следует, что  $|a + b| = |a| + |b|$  тогда и только тогда, когда  $a$  и  $b$  — числа одного знака, точнее (поскольку не запрещается, чтобы какое-нибудь из них было нулем) — когда  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$  или когда  $a \leq 0$  и  $b \leq 0$ .

Очевидно, сформулированный критерий равенства можно записать и так:

$$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0. \quad (2)$$

Следовательно,

$$|a + b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < 0.$$

Критерий равенства «в словесной форме» справедлив для любого числа слагаемых:  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$  тогда и только тогда, когда  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — числа одного знака (точнее — когда среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  нет чисел разного знака). Между прочим, утверждение  $|a + b + c| = |a| + |b| + |c| \Leftrightarrow abc \geq 0$  неверно (почему?).

Пример 1. Решим уравнение

$$|\lg(2x-3) + \lg(4-x^2)| = |\lg(2x-3)| + |\lg(4-x^2)|. \quad (3)$$

По критерию (2) это уравнение равносильно неравенству

$$\lg(2x-3) \cdot \lg(4-x^2) \geq 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно системам

$$\begin{cases} \lg(2x-3) \cdot \lg(4-x^2) \geq 0 \\ 2x-3 > 0 \\ 4-x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(2x-3) \cdot \lg(4-x^2) \geq 0 \\ \frac{3}{2} < x < 2. \end{cases}$$

Так как  $\frac{3}{2} < x < 2 \Leftrightarrow 0 < 2x-3 < 1$ , последняя система равносильна системам

$$\begin{cases} \lg(2x-3) < 0 \\ \lg(4-x^2) < 0 \\ \frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} < x < 2 \\ 0 < 4-x^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} < x < 2 \\ x^2 \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} < x < 2 \\ x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ.  $[\sqrt{3}; 2[$ .

Решение неравенства

$$|\lg(2x-3) + \lg(4-x^2)| < |\lg(2x-3)| + |\lg(4-x^2)|$$

можно получить выбрасыванием из

его области определения  $]\frac{3}{2}; 2[$  решения  $[\sqrt{3}; 2[$  соответствующего уравнения (3). Ответ.  $]\frac{3}{2}; \sqrt{3}[$ .

Пример 2. Решим «уравнение с параметром»

$$|a - 2 \sin x| + 2|\sin x - \cos x| + |2 \cos x - 1| = a - 1.$$

При  $a < 1$  это уравнение, очевидно, корней не имеет. Пусть теперь  $a \geq 1$ . Так как

$$(a - 2 \sin x) + 2(\sin x - \cos x) + (2 \cos x - 1) = a - 1,$$

можно воспользоваться критерием равенства для трех слагаемых. Поскольку, вдобавок,  $a - 1 \geq 0$ , решаемое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a - 2 \sin x \geq 0 \\ \sin x - \cos x \geq 0 \\ 2 \cos x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

или «тройному неравенству»

$$\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \sin x \leq \frac{a}{2}.$$



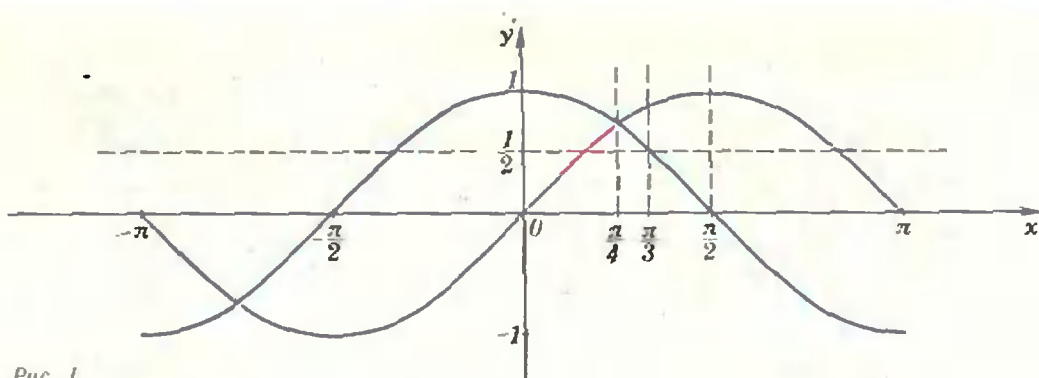


Рис. 1.

На отрезке  $[-\pi; \pi]$  это неравенство равносильно (рис. 1) системе

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \\ \sin x < \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Поскольку  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

получаем, что на  $[-\pi; \pi]$  данная система при  $1 \leq a < \sqrt{2}$  не имеет решений, при  $\sqrt{2} \leq a < \sqrt{3}$  имеет множеством решений отрезок  $[\frac{\pi}{4}; \arcsin \frac{a}{2}]$

и при  $a \geq \sqrt{3}$  — отрезок  $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$ .

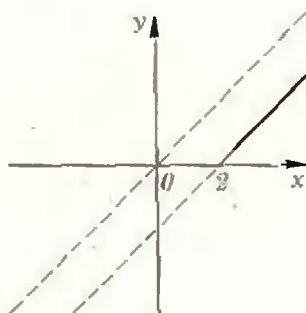
Отв. При  $a < \sqrt{2}$  нет решений, при  $\sqrt{2} \leq a < \sqrt{3}$  объединение отрезков  $[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \arcsin \frac{a}{2} + 2\pi k]$

( $k \in \mathbb{Z}$ ), при  $a \geq \sqrt{3}$  — объединение отрезков  $[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Из (1), заменив в «левом неравенстве»  $b$  на  $-b$ , получаем

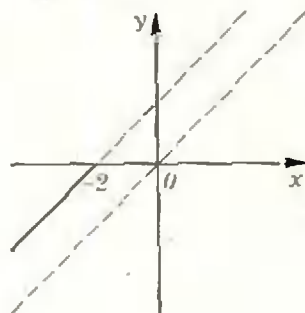
$$|a-b| \geq |a|-|b|.$$

Поскольку  $|a-b| = |a|-|b| \Leftrightarrow |a-b| + |b| = |a|$ , из (2) получаем критерий равенства для разности:  $|a-b| = |a|-|b| \Leftrightarrow (a-b)b \geq 0$ . (4)

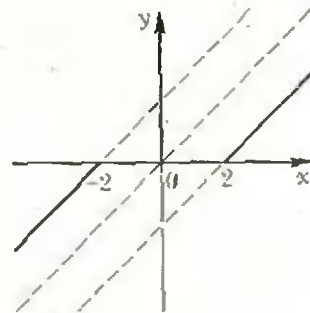


a)

Рис. 2.



б)



в)

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x|-|y|=2. \end{cases} \quad (5)$$

Она равносильна системе

$$\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x|-|y|=2 \\ |x-y|=|x|-|y| \end{cases}$$

которая, по критерию равенства (4), равносильна системе

$$\begin{cases} |x-y|=2, \\ |x|-|y|=2, \\ (x-y)y \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x|-|y|=2 \\ x-y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x-y|=2 \\ |x|-|y|=2 \\ x-y \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

«Левая» система равносильна системам

$$\begin{cases} x-y=2, \\ x \geq y \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=x-2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ее график изображен на рисунке 2, а. «Правая» система равносильна системам:

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ x \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+2 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

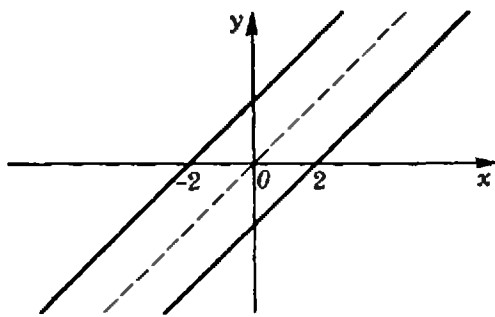
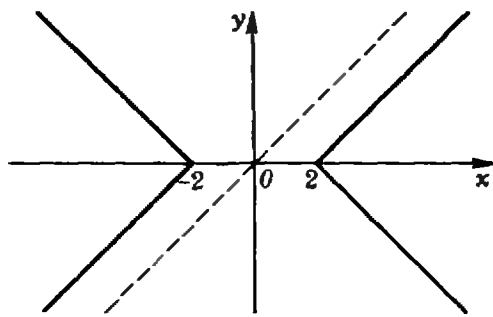


Рис. 3.

а)



б)

ее график изображен на рисунке 2, б. График системы (6) является их объединением (рис. 2, в).

Систему (5) можно также решить «графически». Уравнение  $|x - y| = 2$  равносильно, очевидно, совокупности уравнений  $x - y = 2$ ,  $x - y = -2$  или  $y = x - 2$ ,  $y = x + 2$ ; его график изображен на рисунке 3, а. Уравнение  $|x| - |y| = 2$  в первом квадранте имеет вид  $x - y = 2$  или  $y = x - 2$ ; его график см. на рисунке 2, а. Легко видеть, что график уравнения  $|x| - |y| = 2$  симметричен относительно обеих координатных осей; поэтому его график легко получает-

ся из графика на рисунке 2, а — он изображен на рисунке 3, б. Искомый график на этот раз является пересечением графиков на рисунках 3, а и 3, б (рис. 2, в).

Упражнения

1. Решите уравнение

а)  $|x^2 - 2x| + |4 - x^2| + 2|x| = 4$ ;

б)  $|\sqrt{a+1} + x| - |a + \sqrt{a+1}| = |a - x|$ .

2. Решите неравенство

а)  $|x + \lg x| < |x| + |\lg x|$ ;

б)  $|x^2 - \sqrt{x-3}| < |2 - \sqrt{x-3}| + |x^2 - 2|$ .

3. Решите систему

а)  $\begin{cases} |x + y - 4| = 5 \\ |x - 3| + |y - 1| = 3; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} |y - \sin x| = 1 \\ |y| - |\sin x| = 1. \end{cases}$

## Необычные кристаллы-генераторы

(Начало см. на с. 31)

что накапливается дырок больше, чем выбрасывается. Это приведет к увеличению числа дырок в области флуктуации, другими словами, к росту флуктуации и притоку дополнительного числа свободных электронов. В результате глубина провала поля возрастет, что вызовет дальнейший рост числа захваченных дырок, и так далее — вся флуктуация в целом будет нарастать. Однако существуют и причины, уменьшающие флуктуацию. Это, прежде всего, конечность времени жизни электронов и диффузия электронов и дырок.

Характерный размер флуктуации — ее ширина — не может быть меньше длины пробега свободных дырок, то есть расстояния, которое они пробегают между двумя захватами на ловушки. Иначе дырки будут «пролетать» флуктуацию, не захватываясь в ней. С другой стороны, электроны должны оставаться свободными до тех пор, пока флуктуация нарастает. Таким образом, для рассматриваемого процесса и в пространстве и во времени есть характерные интервалы, которые и определяют возможную длину волны и ее период.

Распространяясь в кристалле, волна создает области, обогащенные и обедненные носителями. Дойдя до конца образца, эти области последовательно исчезают. В резуль-

тате сопротивление образца периодически изменяется, и в цепи наблюдаются колебания тока. Так возникает генерация колебаний в кристалле. Поскольку эти колебания связаны с процессом рекомбинации, их, а значит, и возбуждаемые ими волны называют рекомбинационными.

Изучая особенности рекомбинационных волн, ученые заметили, что их частота и амплитуда зависят не только от особенностей генерирующего кристалла, но и от внешних условий — давления, температуры, освещения, наличия магнитного поля. Это означает, что такой кристалл можно использовать как миниатюрный преобразователь механических, тепловых, световых и др. воздействий в электрические сигналы.

## Задачи

1. Расшифруйте числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{ОДИН} \\ + \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

2. Возьмите шестизначное число, которое делится хотя бы на одно из чисел из списка: 7, 13, 11, 37. Переставьте первую цифру в конец числа. Проверьте, что полученное число вновь будет иметь тот же делитель из списка, что и первоначальное. Почему?

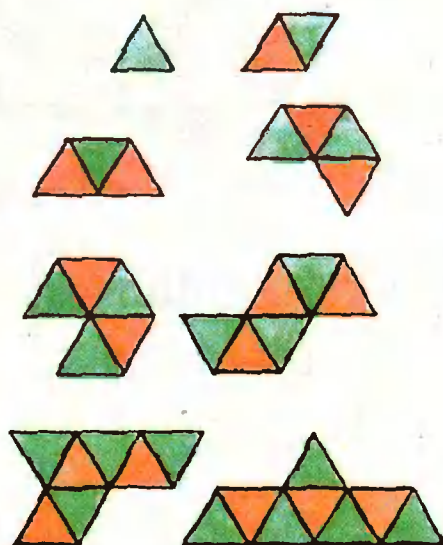
3. Из восьми фигурок, сделанных из правильных треугольников (см. рисунок), составьте один большой правильный треугольник.

4. В моей квартире две комнаты. Число, выражающее площадь первой комнаты в  $\text{м}^2$ , на единицу больше числа выражающего периметр этой комнаты в м, а площадь второй комнаты в  $\text{м}^2$  на единицу меньше ее периметра. Каковы размеры этих комнат, если известно, что длина и ширина каждой комнаты выражаются целым числом метров?

5. Сидя в кресле зубного врача, пациент заметил, что вместе с другими инструментами врач прогрел и зеркальце. «Вы кладете зеркало в горячую воду для стерилизации?» — спросил пациент. «Не только для этого» — ответил врач. А для чего еще?

Эти задачи нам предложили: Н. К. Антонович, Т. Б. Искандерова, Ю. А. Аленков, К. П. Гаврилкин, А. П. Савин.

$$\begin{array}{r} + \text{ОДИН} \\ + \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$





## Степа Мошкин путешествует

или Трое на плоту,  
не считая Гобоя

Е. Е. СЕМЕНОВ

В июльский полдень от живописной деревни Усть-Утки, что на берегу живописной реки Усть-Гуси, отчалил плот. На плоту было три путешественника: семиклассник Степа Мошкин, его приятель Ваня Синицын и Петр Иванович. Петр Иванович вел в школе физико-математический кружок и был заядлым путешественником. Петр Иванович стоял у весла на носу, Степа управлялся с веслом на корме, а Ваня отталкивался от дна шестом. Плот вышел на середину реки. Над палаткой, установленной на плоту, полоскался флаг. На одной его стороне был изображен Евклид, а на другой — Архимед.

— Посмотрите, — закричал вдруг Степа, — Гобой!

Действительно, метрах в пятидесяти за кормой, чуть задрав нос над водой и прижав уши, на середине реки плыл любимый Степин пес Гобой. Еще несколько секунд — и Гобой стал четвертым членом экипажа.

— Ну, — сказал Петр Иванович, — теперь, ребята, смотрите по сторо-

нам. Мы с вами будем все время «играть в школу»: по очереди один из нас будет учителем, а двое других — учениками. Учитель будет задавать вопросы, а ученики, разумеется, должны на них отвечать. Вопросы же мы будем задавать о том, что увидим вокруг. Вот, например, первый: посмотрите, бельё, что сушится на берегу, висит на веревке неподвижно. И флаг над нашей школой тоже неподвижен, а вот флаг на плоту у нас раздувается. Почему? Вот вам еще вопрос: видите ветку, что плавает возле берега? Она явно от нас отстает. А вот эта ветка, у нас за кормой, все время плавает рядом. Как вы думаете, почему так?

— Понятно, — сказали хором Степа и Ваня.

— Отвечать будем по очереди, — сказал Степа. — Первый — Ваня, он на «В».

Ваня не возражал.

— Флаг у нас на плоту раздувается потому, ... И тут мы прервем Ваню. Он ответил на вопросы Петра Ивановича и ответил правильно. Подумайте и вы над этими вопросами. А проверить правильность своего ответа вы сможете, посмотрев ванин ответ, который будет приведен в следующем номере журнала. И дальше мы будем поступать так же: мы будем сообщать вам только вопросы, которые задавали друг другу путешественники, а отвечать на них вы будете сами. А потом проверите себя, получив девятый номер «Кванта».

Вот еще несколько вопросов, заданных Петром Ивановичем.

1. Скорость реки Усть-Гусь около 4 км/ч. С какой скоростью плыл плот по отношению к берегам?

2. Гобой плавает со скоростью 5 км/ч. С какой скоростью он приближался к плоту?

3. С какой скоростью плыл Гобой по отношению к берегам?

Ваня тоже придумал вопросы на тему Гобоя:

4. Если бы Гобой плыл против течения, то с какой скоростью двигался бы он по отношению к берегам?

5. С какой скоростью приближался бы Гобой к плоту, плывя ему навстречу?

А Степа сочинил про Гобоя задачу:

**Степина задача.** Гобой прыгнул в воду, когда расстояние между ним и плотом по реке было 50 м. Через 36 с Гобой оказался на плоту. При этом он все время плыл в направлении, перпендикулярном берегам. С какой скоростью по отношению к берегу плыл Гобой?

За эту задачу Петр Иванович похвалил Степу. А Ваня, решая ее, запутался в корнях, и у него получилось, что Гобой плыл со скоростью 80 км/ч. «Сомневаюсь,— сказал Петр Иванович.— С такой скоростью бегают антилопа гну». В конце концов Ваня справился с трудностями устного счета. Петр Иванович и его похвалил.

— Ой, смотрите, какая туча!— кричал Степа. И в самом деле, к солнцу подбиралась большая сизая туча.

— Будет гроза. Быстро к берегу!— скомандовал Петр Иванович.

### Далеко ли гроза?

Прогремело раскатисто и сильно. Степа и Ваня стремглав влетели в палатку.

— Надо скорее закрывать палатку, а то вон как гремит и сверкает!— произнес Ваня, запыхавшись.

— Убить ведь может,— добавил Степа.

— Не беспокойтесь,— залезая в палатку сказал Петр Иванович.— Разряд произошел за три километра отсюда. Так что гроза пока на безопасном для нас расстоянии.

— Почему Вы так думаете?— спросил Степа с сомнением.

— А вот вы не закрывайте палатку и внимательно смотрите и слушайте. Как только сверкнет молния — засекайте время и считайте, сколько секунд пройдет до того, как загремит гром. Звук в воздухе распространяется со скоростью примерно 330 метров в секунду. А гром — это звук, сопровождающий электрический разряд в атмосфере, то есть молнию.

— Понятно,— догадался Степа.— Если от молнии до грома пройдет, например, 6 секунд, то молния, значит, сверкнула в 2 километрах от нас.

— Теперь я не буду бояться грома, ведь это только звук,— сказал Ваня.

— Петр Иванович, а как быть, если нет часов?— спросил Степа.

— На этот случай надо заранее приноровиться считать секунды приблизительно. Удобно, например, произносить подряд размеренно числа 21, 22, 23, 24 и так далее, с такой скоростью, чтобы на произнесение каждого из них уходила одна секунда.

Тут снова сверкнула молния. Ребята немедленно принялись считать: двадцать один, двадцать два, ..., тридцать три — и раздался гром.

— Триста двадцать на тридцать... Молния от нас примерно за четыре с половиной километра,— первым подсчитал Степа.

— Вот и прекрасно. Значит, гроза удаляется от нас,— сказал Петр Иванович.— Кстати, вот вам вопрос:

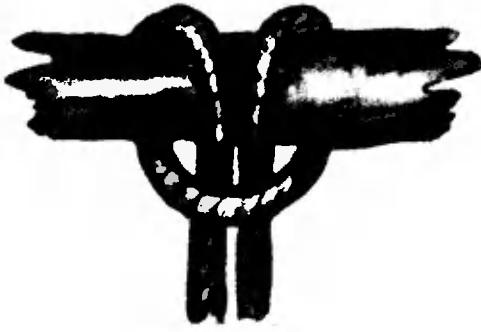
6. Почему при определении расстояния от нас до места разряда мы учитываем скорость распространения звука, но не учитываем скорость распространения света?

### Можно ли выиграть в силе с помощью неподвижного блока?

После дождя стало прохладно.

— Как бы нам не простудиться,— сказал Петр Иванович.— Давайте-ка займемся физкультурой.

Он достал из рюкзака длинную веревку, сложил ее вдвое, перекинул петлю через кренкий сук березы, просунул в петлю свободные концы и затянул.



— Вот и готов канат. Кто полезет первым?

Степа довольно быстро и легко поднялся по канату, ухватился за сук и хотел было покачаться. Но сук был мокрый, скользкий, и Степа благоразумно спустился. Пришла Ванина очередь. Однако у него не хватало силенок подняться и наполовину.

— Вот если бы был подвижный блок... Тогда бы я влез — ведь подвижный блок дает выигрыш в силе в два раза! — мечтательно произнес он.

— А может быть, тебе помог бы и неподвижный блок? — спросил Петр Иванович.

— Ну нет, — ответил Ваня. — Меня не проведешь. Во-первых неподвижного блока у нас нет. А во-вторых, неподвижный блок не дает выигрыша в силе... Вот разве перебросить веревку через сук. Я буду держаться за один конец, а за другой вы со Степой будете тянуть меня вверх.

— А все-таки подумайте, нельзя ли с помощью неподвижного блока выиграть в силе, — сказал Петр Иванович.

Друзья надолго задумались. Смотрели на сук, на веревку, друг на друга...

— Нашел! — закричал Степа. — Во-первых, я нашел неподвижный блок: сук-то скользкий, трение веревки об него будет очень малым, и она будет перемещаться по нему почти как по колеснику неподвижного блока. Во-вторых, я придумал, как выиграть в силе в два раза: перекидываю веревку через наш «неподвижный блок», одним концом верев-

ки обвязываю себя вокруг пояса, а по другому концу влезая. Мой вес распределится на два конца, и мне надо будет тянуть за веревку с силой, в два раза меньшей!

— Молодец! — радостно воскликнул Петр Иванович.

—...дец! — ответило ему эхо.

7. Получишь ли ты выигрыш в работе, поднимаясь таким образом?

А Степу он спросил про эхо:

8. Эхо возвратило слово «молодец» через 1 секунду. На каком расстоянии от нас находится та преграда, от которой отразился звук?

\* \* \*

Вечером путешественники сидели у костра. Над рекой взошла полная луна.

— Можете ли вы приблизительно определить размеры Луны? — спросил Петр Иванович. — Все, что вам для этого нужно знать, это расстояние от нее до Земли. Оно равно примерно 384 000 км. Все остальные измерения вы можете сделать сами. Подумайте, как это сделать. И пусть это будет последним вопросом на сегодня.



# «Задачи на премию» прошлого века

Кандидат  
педагогических наук  
И. С. ПЕТРАКОВ

В 1884 г. профессор Киевского университета В. П. Ермаков на свои средства начал издавать «Журнал элементарной математики». Журнал распространялся по подписке по всей стране. К работе в редакции были привлечены многие видные математики того времени.

Через два года у Ермакова не хватило средств — журнал, под названием «Вестник опытной физики и элементарной математики», стал издавать и редактировать Э. К. Шпачинский. Впрочем, состав редакции не изменился. Ермаков по-прежнему принимал в ее работе самое активное участие.

С 1899 г. редактором «Вестника» был известный впоследствии геометр В. Ф. Каган. Издание «Вестника» продолжалось до января 1917 г.

С 1885 г. в журнале стали публиковаться «задачи на премию». (В нашей стране это был первый конкурс по решению задач, проводившийся в широкой печати.) Приведем первые пять задач (их терминология, конечно, отличается от нашей).

**Задача 1 (1885 г.).** Найти три целых числа, чтобы сумма их квадратов делилась без остатка на их произведение. Показать, что задача имеет бесконечное



число решений, хотя и нельзя составить общего выражения для искомого числа\*. Показать, что частное не может равняться никакому иному числу, кроме 3 и 1. Привести все решения, не превосходящие 1000.

**Задача 2 (1886 г.).** Доказать следующее предложение: если сумма квадратов двух взаимно простых чисел разлагается на множители, то каждый множитель также может быть выражен суммой квадратов двух чисел.

**Задача 3 (1887 г.).** Даны два равных непересекающихся круга; на двух общих внутренних касательных к ним взяты две произвольные точки  $F$  и  $F'$ . Из каждой из этих точек к каждому кругу можно провести еще по одной касательной; пусть касательные, проведенные из точек  $F$  и  $F'$  к одному кругу, встречаются в точке  $A$ , к другому кругу — в точке  $B$ . Требуется доказать, что прямая  $AB$  параллельна пря-

мой, соединяющей центры кругов, и что прямая, соединяющая середины прямых  $FF'$  и  $AB$ , проходит через середину прямой, соединяющей центры. Показать, что в случае неравных кругов прямая  $AB$  проходит через внешний центр подобия кругов\*).

**Задача 4 (сентябрь 1888 г.).** Ряд  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$  составлен таким образом, что между каждыми двумя смежными числами существует зависимость

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 + 2ix_n x_{n+1} + 2b(x_n + x_{n+1}) + c = 0.$$

Выразить произвольный член ряда через первый и коэффициенты  $a, b$  и  $c$ .

**Задача 5 (октябрь 1888 г.).** Составить между четырьмя неизвестными  $x, y, z, t$  две такие зависимости, чтобы три выражения

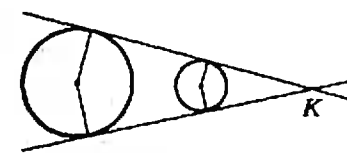
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t},$$

$$\frac{x}{x^2 + ax + b} + \frac{y}{y^2 + ay + b} + \frac{z}{z^2 + az + b} + \frac{t}{t^2 + at + b},$$

$$\frac{1}{x^2 + ax + b} + \frac{1}{y^2 + ay + b} + \frac{1}{z^2 + az + b} + \frac{1}{t^2 + at + b}$$

обращались в постоянные величины\*\*). Определить эти постоянные величины.

\* Точка  $K$  на рисунке — «внешний центр подобия» окружностей.



\*\* Видимо, по замыслу авторов требовалось написать два соотношения, связывающих  $x, y, z, t$  и  $a$  и  $b$ , при выполнении которых указанные выражения не зависели бы от  $x, y, z$  и  $t$ .

## Поправка

В «Кванте» № 5 в статье «На пальцах и в уме» по вине редакции на с. 41 содержится несколько ошибок. Во второй колонке на с. 41 должно быть:

Для того чтобы найти  $(10x+5)^2$ , достаточно  $x$  умножить на число, следующее за ним, и к полученному произведению приписать 25. Например,

$$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1225.$$

Это правило является следствием равенства

$$(10x+5)^2 = 100x(x+1) + 25, \quad (3)$$

которое, в свою очередь, — частный случай тождества (2).

# Задачник Кванта

## Задачи

М816—М820; Ф828—Ф832

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 октября 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М816, М817» или «Ф828». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М816.** Натуральные числа  $a$  и  $b$  получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что

- а) суммы цифр чисел  $2a$  и  $2b$  равны;
- б) суммы цифр чисел  $a/2$  и  $b/2$  равны (если  $a$  и  $b$  четные);
- в) суммы цифр чисел  $5a$  и  $5b$  равны.

*А. Д. Лисицкий*

**М817.** Точка  $K$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что соотношение

$$|AK|^2 = |AB| \cdot |AC| - |KB| \cdot |KC|$$

выполнено тогда и только тогда, когда  $|AB| = |AC|$  или  $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$ .

*А. Л. Тоом*

**М818.** Пусть какие-то  $k$  вершин правильного  $n$ -угольника закрашены синим цветом (остальные вершины — черные). Будем называть множество закрашенных вершин *равномерным*, если при любом  $m$  количества синих вершин в любых двух наборах из  $m$  последовательных вершин  $n$ -угольника совпадают или отличаются на 1 (см. рис. 1, где приведен пример равномерного множества для  $n=8$ ,  $k=5$ ).

- а) Постройте равномерные множества для  $n=12$ ,  $k=5$ ;  $n=17$ ,  $k=7$ .

Докажите, что равномерное множество существует и единственно (с точностью до поворотов  $n$ -угольника).

- б) если  $n$  делится на  $k$ ;
- в) для любых  $n$  и  $k$  ( $k \leq n$ ).

*М. Л. Концевич*

**М819.** В Швамбрании  $n$  городов, каждые два из которых соединены дорогой. (Дороги сходятся лишь в городах, все пересечения организованы в разных уровнях.) Злой волшебник намеревается установить на каждой дороге одностороннее движение так, что, выехав из любого города, в него уже нельзя будет вернуться. Докажите, что



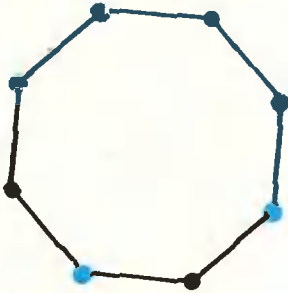


Рис. 1.

- а) волшебник может это сделать;  
 б) при этом найдется город, из которого можно добраться до всех других, и найдется город, из которого нельзя выехать;  
 в) существует  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  способов осуществить намерение злого волшебника.

Л. М. Козаков

**M820\***. а) Правильный восьмиугольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.

б) Правильный  $4k$ -угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы  $k$  прямоугольников.

в) Найдите суммарную площадь прямоугольников из пункта б), если длина стороны  $4k$ -угольника равна 1.

В. В. Производов

**Ф828.** Из точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , лежащих на одной прямой (точка  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ ), бросают три тела —  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

1) бросают одновременно тела  $a$  и  $b$  и не бросают тело  $c$ ; при этом тела  $a$  и  $b$  сталкиваются в полете;

2) бросают одновременно тела  $a$  и  $c$  и не бросают тело  $b$ ; при этом тела  $a$  и  $c$  сталкиваются раньше, чем тела  $a$  и  $b$  в первом случае. При каждом бросании каждому телу сообщают одну и ту же начальную скорость. Столкнутся ли в полете тела  $b$  и  $c$ , если не бросать тело  $a$ ?

С. С. Кротов

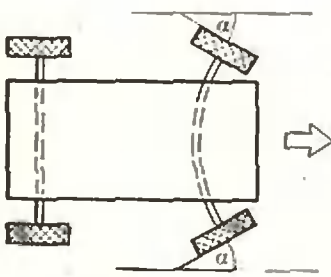


Рис. 2.

**Ф829.** Передняя ось телеги изогнута так, что плоскости колес образуют угол  $\alpha$  с направлением движения. Найти силу сопротивления при установившемся равномерном движении телеги (рис. 2). Коэффициент трения скольжения колес о дорогу  $\mu$ . Вес телеги  $P$  равномерно распределен на все колеса.

А. П. Ершов

**Ф830.** Известно, что давление насыщенного пара над водным раствором сахара меньше, чем над чистой водой на величину  $\Delta p = 0,05 \cdot p_{\text{нас}} \cdot c$ , где  $p_{\text{нас}}$  — давление насыщенного пара над чистой водой,  $c$  — весовая концентрация раствора. Цилиндрический сосуд, наполненный до высоты  $h_0 = 10$  см раствором сахара с концентрацией  $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ , помещают под низкий колпак. На дне колпака раствор сахара с концентрацией  $c_2 = 10^{-3}$  (рис. 3; высота уровня раствора много меньше  $h_0$ ). Каким будет уровень раствора в сосуде после установления равновесия? Температура под колпаком поддерживается постоянной и равной  $20^\circ\text{C}$ . Пар над поверхностью раствора содержит только

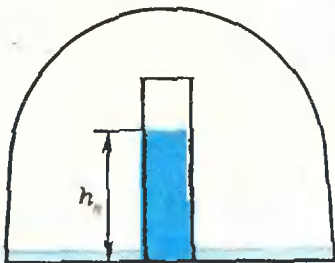


Рис. 3.

молекулы воды. Универсальная газовая постоянная  $R=8,3$  Дж/(моль  $\cdot$  К).

*А. И. Бuzдин*

**Ф831.** Незаряженная проводящая тонкостенная сферическая оболочка помещена в однородное электрическое поле. При напряженности поля  $E_0$  оболочка разрывается. При какой минимальной напряженности поля разорвется оболочка вдвое большего радиуса, имеющая ту же толщину стенок?

*С. К. Строков*

**Ф832\*.** Квадратная недеформируемая сверхпроводящая рамка со стороной  $a$  расположена горизонтально и находится в неоднородном магнитном поле, индукция которого меняется в пространстве по закону

$$\begin{aligned} B_x &= -kx, \\ B_y &= 0, \\ B_z &= kz + B_0. \end{aligned}$$

Масса рамки  $m$ , индуктивность  $L$ . В начальный момент центр рамки совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям  $X$  и  $Y$ . Рамку отпускают. Как она будет двигаться и где окажется через время  $t$ ?

*О. Ю. Никишина*

## Problems

M816—M820; P828—P832

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 31st, 1983 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1 «Квант». Please send us the solutions of physics and

**M816.** The natural numbers  $a$  and  $b$  can be obtained from each other by changing the order of their digits. Prove that

- the sum of digits of the numbers  $2a$  and  $2b$  are equal;
- the sum of digits of the numbers  $a/2$  and  $b/2$  (when  $a$  and  $b$  are even) are equal;
- the sum of digits of  $5a$  and  $5b$  are equal.

*A. D. Lisitski*

**M817.** The point  $K$  lies on side  $BC$  of triangle  $ABC$ . Prove that the relation

$$|AK|^2 = |AB| \cdot |AC| - |KB| \cdot |KC|$$

holds if and only if  $|AB| = |AC|$  or  $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$ .

*A. L. Toom*

**M818.** Suppose  $k$  vertices of a regular polygon with  $n$  sides are painted blue (the others — black). A set of painted vertices is called *uniform*, if for any  $m$  the amount of blue vertices in any two sets of  $m$  successive vertices of the polygon is the same or differs by 1 (see figure Рис. 1, where an example of a uniform set is given for  $n=8, k=5$ ).

- Construct uniform sets for  $n=12, k=5; n=17, k=7$ . Prove that uniform sets exist and are unique (up to rotations of the polygon)

mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**.

- b) if  $n$  is divisible by  $k$ ;  
c) for all  $n$  and  $k$  ( $k < n$ ).

*M. L. Kontsevich*

**M819.** There are  $n$  cities in Shvanbrania and every two cities are joined by road. (The roads come together at the cities only, the intersections being on different levels.) An evil magician intends to establish one-way traffic on all the roads so that, having left a city, one can never return there. Prove that

- a) the magician can do this;  
b) when he does, there will be a city which can be reached from any other and one nobody will be able to enter;  
c) how many ways are there to carry out the magician's intention?

*I. M. Koganov*

**M820\*** a) A regular octagon is split up into a finite number of parallelograms. Prove that there are at least two rectangles among them.

b) A regular polygon with  $4k$ -sides is split up into a finite number of parallelograms. Prove that there are at least  $k$  rectangles among them.

c) Find the total area of the rectangles indicated in b) if the polygon's side is of length 1.

*V. K. Protzvolov*

**P828.** Three solids  $a$ ,  $b$ ,  $c$  are thrown from points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in space.

1) When the solids  $a$ ,  $b$  are thrown simultaneously (and  $c$  is not),  $a$  and  $b$  collide in flight.

2) When  $a$ ,  $c$  are thrown simultaneously (and  $b$  is not),  $a$  and  $c$  collide sooner than  $a$  and  $b$  did. The body  $a$  is thrown with the same initial velocity in both cases. Will the bodies  $c$  and  $b$  collide if they are thrown simultaneously (and  $a$  is not) with the same initial velocities as before? The points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  are collinear, the point  $B$  being between  $A$  and  $C$ .

*S. S. Krotov*

**P829.** The leading axis of a cart is bent so that the planes of the wheels form the angle  $\alpha$  with the direction of motion. Find the force of resistance for established uniform motion of the cart (see figure Puc. 2). The sliding friction coefficient of the wheels on the road is  $\mu$ . The weight  $P$  of the cart is uniformly distributed among the wheels.

*A. P. Ershov*

**P830.** It is known that the pressure of saturated vapor over a solution of sugar in water is less than that over pure water by  $\Delta p = 0.05 p_{\text{sat}} c$ , where  $p_{\text{sat}}$  is the pressure of saturated vapor over pure water,  $c$  is the weight concentration of the solution. A cylindrical receptacle, filled to height  $h_0 = 10$  cm by a sugar solution of concentration  $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  is placed under a large cover. On the bottom there is a sugar solution of concentration  $c_2 = 10^{-3}$  (its level is negligible as compared to  $h_0$ ). What will the level of the solution be when equilibrium is established? The temperature under the cover is maintained constantly equal to 20°C. The vapor above the solution only contains molecules of water. The universal gas constant is  $R = 8.3 \text{ J}/(\text{mole} \cdot \text{K})$ .

*A. I. Bazdin*

**P831.** An uncharged conducting thin-walled spherical envelope is placed in a uniform electric field. When the field reaches the tension  $E_0$  the envelope breaks. For what minimal tension will an envelope of twice the radius of the first one, with walls the same width, break?

*S. K. Strokov*

**Р832\***. A square undeformable superconducting frame of side  $a$  is placed horizontally in a non-uniform magnetic field whose induction in space is given by

$$B_x = -kx, B_y = 0, B_z = kz + B_0.$$

The mass of the frame is  $m$ , its inductivity is  $L$ . At the initial moment the centre of the frame is at the origin with sides parallel to the  $X$  and  $Y$  axes. How will the frame move after it is released and where will it be after time  $t$ ?

O. Yu. Nikrishina

**М801\***. Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено равенство

$$\begin{aligned} & [\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \dots + [\sqrt[n]{n}] = \\ & = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \dots + [\log_n n] \end{aligned}$$

( $[x]$  означает целую часть числа  $x$ ).

## Решения задач

**М801—М805; Ф813—Ф817**

Заметим, что целая часть числа  $a > 1$  равна количеству натуральных чисел, меньших или равных  $a$ . В частности,  $[\sqrt[n]{n}] - 1$  есть число натуральных  $y \geq 2$ , таких что  $y \leq \sqrt[n]{n}$ , то есть  $y^n \leq n$ . Следовательно, сумма  $([\sqrt{2}] - 1) + ([\sqrt[3]{2}] - 1) + \dots + ([\sqrt[n]{2}] - 1)$  равна количеству  $N$  всех пар  $(x, y)$  натуральных чисел, больших 1, удовлетворяющих неравенству  $y^x \leq n$  (при  $x > n$  это неравенство решений не имеет, так как  $2^x > n$ ).

Аналогично рассматривается правая часть:  $[\log_n n] - 1$  — это число натуральных  $x \geq 2$ , таких, что  $x \leq \log_n n$ , то есть  $n^x \leq n$ . Поэтому

$$([\log_2 n] - 1) + ([\log_3 n] - 1) + \dots + ([\log_n n] - 1) = N$$

(при  $m > n, y \geq 2$  неравенство  $m^y \leq n$ , очевидно, не выполняется).

Итак, обе части нашего равенства равны  $N + n - 1$ .  
В. В. Касиль

**М802.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  как на гипотенузах построены вне его прямоугольные треугольники  $APB$  и  $BQC$  с одинаковыми углами величины  $\beta$  при их общей вершине  $B$ . Найдите углы треугольника  $PQK$ , где  $K$  — середина стороны  $AC$ .

Ответ:  $\widehat{P} = \widehat{Q} = \beta, \widehat{K} = 180^\circ - 2\beta$ .

Эта задача относится к довольно большой группе задач, в которых рассматриваются треугольники (или другие многоугольники) данной формы, построенные на сторонах другого треугольника (или многоугольника); наверное, самая известная из них — это так называемая «задача Птолемея» — доказать, что центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника вне его, сами образуют правильный треугольник. Как правило, эти задачи можно решать с помощью композиции преобразований плоскости.

Рассмотрим два преобразования подобия (рис. 1):  $F_P = H_P^k \circ R_P^{90^\circ}$ , где  $k = |PB| : |PA|$ , — композицию поворота  $R_P^{90^\circ}$  вокруг  $P$  на  $90^\circ$  и гомотетии с центром  $P$  и коэффициентом  $k$ , и  $F_Q = H_Q^k \circ R_Q^{90^\circ}$  (такие преобразования называют поворотными гомотетиями или спиральными подобиями). Их композиция  $F = F_Q \circ F_P$  оставляет точку  $K$  на месте (этим и обусловлен выбор именно таких преобразований; доказательство приведем чуть позже). Пусть  $F_P(K) = K_1$  (рис. 2), тогда  $F_Q(K_1) = K$ . Треугольники  $KPK_1, KQK_1$  и  $APB$  подобны друг другу как прямоугольные треугольники с одинаковым отношением катетов ( $|KP| : |PK_1| = |KQ| : |KQ_1| = k = |PA| : |PB|$ ). А поскольку  $KK_1$  — общая гипотенуза треугольников  $KPK_1$  и  $KQK_1$ , они конгруэнтны, так что  $\widehat{KPK_1} = \widehat{KQK_1}$ . Следовательно,  $\widehat{PKQ} = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 2\beta, \widehat{K\widehat{P}Q} = \widehat{K\widehat{Q}P} = (180^\circ - (180^\circ - 2\beta)) / 2 = \beta$ .

Остается доказать, что  $K$  — неподвижная точка преобразования подобия  $F$ . Отметим следующие свойства  $F$ :

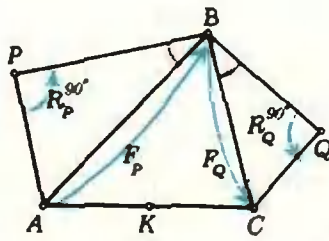


Рис. 1.

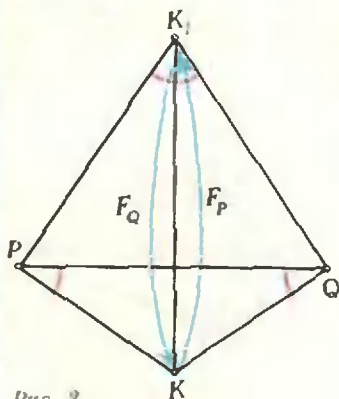


Рис. 2.

**М803.** Сумма двух рациональных чисел  $x$  и  $y$  — натуральное число, сумма обратных к ним чисел  $1/x$  и  $1/y$  — тоже натуральное число. Какими могут быть  $x$  и  $y$ ?

1)  $F$  — перемещение (потому что коэффициент подобия  $F$  равен  $k \cdot \frac{1}{k} = 1$ );

2) Любой луч при перемещении  $F$  переходит в противоположно направленный (при гомотетии направления лучей сохраняются, при повороте любой луч поворачивается на угол, равный углу поворота, поэтому общий угол поворота любого луча при преобразовании  $F$  равен  $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ );

3)  $F(A) = C$  ( $F_P(A) = B$  по выбору  $F_P$ , а  $F_Q(B) = C$  потому, что  $\widehat{BQC} = 90^\circ$  и  $|QC| : |QB| = |PA| : |PB| = 1/k$ ).  
Отсюда вытекает, что  $F$  — это центральная симметрия  $Z_A$  с центром  $K$  и, в частности,  $F(K) = K$ .

Попробуйте таким же способом решить «задачу Нанолсона».

В. И. Дуровский

◆  
Ответ:  $(x, y) = (1, 1), (1/2, 1/2), (2, 2)$ . Представим числа  $x$  и  $y$  в виде несократимых дробей:  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ .

Тогда  $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$  — натуральное число. Следовательно,

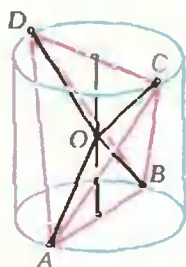
$ad + bc$  делится на  $b$ , а так как  $a$  и  $b$  — взаимно простые числа,  $d$  делится на  $b$ . С другой стороны,  $ad + bc$  делится на  $d$ , поэтому  $b$  делится на  $d$ . Отсюда вытекает, что

$b = \pm d$ . Аналогично,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{ad + bc}{ac}$  — натуральное

число, поэтому  $a = \pm c$ . Таким образом,  $x = y$  или  $x = -y$ . Второй случай невозможен, поскольку по условию  $x + y \geq 1$ . В первом случае  $x + y = 2x = 2a/b$  и  $2/x = 2b/a$  — натуральные числа, то есть  $a$  и  $b$  — делители двойки, причем  $a/b > 0$ . Следовательно,  $a/b = 1/1 = 1$ , или  $a/b = 1/2$ , или  $a/b = 2/1 = 2$ .

А. П. Савин

**М804.** Точка  $O$  — середина оси прямого кругового цилиндра,  $A$  и  $B$  — диаметрально противоположные точки окружности нижнего основания,  $C$  — некоторая точка окружности верхнего основания, не лежащая в плоскости  $OAB$ . Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла  $OABC$  (с вершиной  $O$ ) равна  $2\pi$ .



◆  
Пусть  $D$  — точка окружности верхнего основания цилиндра, диаметрально противоположная точке  $C$  (рис. 1). Мы докажем, что трехгранные углы  $OABC, OBDC, OCDA$  и  $ODAB$  с общей вершиной  $O$  попарно конгруэнтны. Поскольку каждые три из этих углов имеют общее ребро ( $OA, OB, OC$  или  $OD$ ) и сумма их двугранных углов при этом ребре, очевидно, равна  $2\pi$ , сумма всех их 12 двугранных углов равна  $4 \cdot 2\pi = 8\pi$ . Следовательно, сумма двугранных углов каждого из них, в частности, угла  $OABC$ , равна  $8\pi/4 = 2\pi$ .

Для доказательства конгруэнтности этих трехгранных углов заметим, что противоположные ребра тетраэдра  $ABCD$  попарно равны ( $|AB| = |CD|$  как диаметры конгруэнтных окружностей, а ребра  $AC$  и  $BD$ , а также  $AD$  и  $BC$  взаимно симметричны относительно оси цилиндра; (см. рис.)). А так как точка  $O$  равноудалена от всех вершин тетраэдра,  $\triangle OAB \cong \triangle OCD, \triangle OAC \cong \triangle OBD$  и  $\triangle OAD \cong \triangle OBC$ . Поэтому рассматриваемые трехгранные углы имеют соответственно равные плоские углы, а значит, конгруэнтны. Конгруэнтность трехгранных углов можно доказать и иным, заметив, что прямые, соединяющие середины ребер  $AC$  и  $BD$ , а также  $AD$  и  $BC$ , как и ось цилиндра, являются осями симметрии тетраэдра  $ABCD$ .

Тетраэдр  $ABCD$  с конгруэнтными гранями, который помог нам решить задачу, обладает многими замечательными свойствами. Большой список его свойств имеется в статье В. Э. Матизена в «Кванте» № 6 за этот год.

И. К. Жук

М805\*. а) На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  выбраны, соответственно, точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  так, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Докажите, что  $S_{A_1B_1C_1} < S_{ABC}/4$ .

б) На гранях  $B_1C_1D$ ,  $CDA$ ,  $BDA$ ,  $ABC$  тетраэдра  $ABCD$  выберем, соответственно, точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  так, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  пересекаются в одной точке. Докажите, что  $V_{A_1B_1C_1D_1} < V_{ABCD}/27$ .

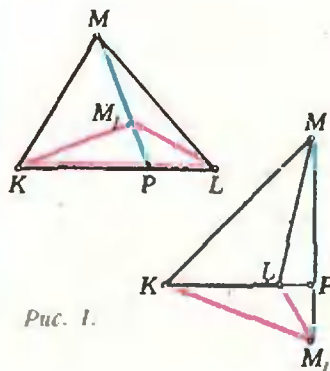


Рис. 1.

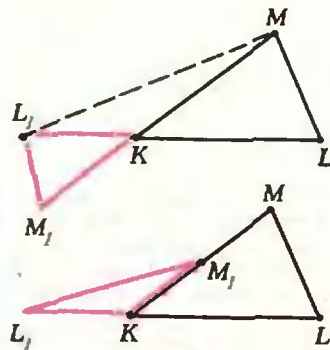


Рис. 2.

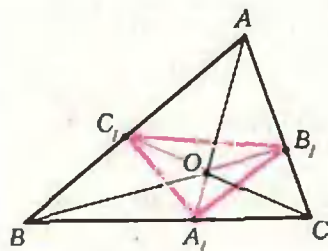


Рис. 3.

Прежде всего докажем несколько простых, но очень полезных лемм об отношениях площадей треугольников и объемах тетраэдров.

(1) Если прямая  $MM_1$  пересекает прямую  $KL$  в точке  $P$  (рис. 1), то

$$S_{KLM} : S_{KLM_1} = |MP| : |M_1P|.$$

Это следует из очевидного равенства  $h_M : h_{M_1} = |MP| : |M_1P|$ , где  $h_M$  и  $h_{M_1}$  — высоты треугольников  $KLM$  и  $KLM_1$ .

(2) Если точки  $L_1$  и  $M_1$  лежат на прямых  $KL$  и  $KM$  (рис. 2), то

$$S_{KLM} : S_{KL_1M_1} = \frac{|KL| \cdot |KM|}{|KL_1| \cdot |KM_1|}.$$

Действительно,  $S_{KLM} : S_{KL_1M_1} = (S_{KLM} : S_{KLM_1}) \cdot (S_{KLM_1} : S_{KL_1M_1}) = (|KL| : |KL_1|) \cdot (|KM| : |KM_1|)$  в силу (1).

(3) Если прямая  $NN_1$  пересекает плоскость  $KLM$  в точке  $P$ , то

$$V_{KLMN} : V_{KLMN_1} = |NP| : |N_1P|.$$

(Доказывается аналогично (1).)

(4) Если точки  $L_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$  лежат на прямых  $KL$ ,  $KM$ ,  $KN$ , то

$$V_{KLMN} : V_{KL_1M_1N_1} = \frac{|KL| \cdot |KM| \cdot |KN|}{|KL_1| \cdot |KM_1| \cdot |KN_1|}.$$

(Доказывается аналогично (2).)

Перейдем непосредственно к решению задачи.

а) Пусть  $O$  — точка пересечения отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ ;  $S$ ,  $S_{A_1}$ ,  $S_B$  и  $S_C$  — площади треугольников  $ABC$ ,  $OBC$ ,  $OCA$  и  $OAB$  (рис. 3). Тогда по (1)

$$\frac{|OA|}{|OA_1|} = \frac{|AA_1| - |OA_1|}{|OA_1|} = \frac{S}{S_{A_1}} - 1 = \frac{S - S_{A_1}}{S_{A_1}}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для отрезков  $BB_1$  и  $CC_1$ . Таким образом,

$$\frac{|OA_1|}{|OA|} = \frac{S_{A_1}}{S - S_{A_1}}, \quad \frac{|OB_1|}{|OB|} = \frac{S_B}{S - S_B}, \quad \frac{|OC_1|}{|OC|} = \frac{S_C}{S - S_C}.$$

Разобьем  $\Delta A_1B_1C_1$  на три треугольника отрезками  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  и оценим площадь каждого из них отдельно. В силу (2)

$$\begin{aligned} S_{OA_1B_1} &= S_{OAB} \cdot \frac{|OA_1| \cdot |OB_1|}{|OA| \cdot |OB|} = \\ &= S_C \cdot \frac{S_{A_1} S_B}{(S - S_{A_1})(S - S_B)} = \frac{S_{A_1} S_B S_C}{(S - S_{A_1})(S - S_B)(S - S_C)} \cdot (S - S_C). \end{aligned}$$

Складывая это равенство с аналогичными равенствами для треугольников  $OB_1C_1$  и  $OC_1A_1$ , получим:

$$S_{A_1B_1C_1} = k((S - S_C) + (S - S_A) + (S - S_B)) = 2kS. \quad (*)$$

Чтобы оценить  $k$ , воспользуемся «неравенства о средних» для  $S_A$  и  $S_B$ ,  $S_B$  и  $S_C$ ,  $S_C$  и  $S_A$ :

$$\sqrt{S_A S_B} < \frac{S_A + S_B}{2}, \quad \sqrt{S_B S_C} < \frac{S_B + S_C}{2}, \quad \sqrt{S_C S_A} < \frac{S_C + S_A}{2}$$

и перемножим их:

$$\begin{aligned} S_A S_B S_C &< (S_A + S_B)(S_B + S_C)(S_C + S_A)/8 = \\ &= (S - S_C)(S - S_A)(S - S_B)/8. \quad (**) \end{aligned}$$

Таким образом,  $k < 1/8$  и  $S_{A_1B_1C_1} < S_{ABC}/4$ .

б) Приведем лишь общий план доказательства — оно почти дословно повторяет рассуждения пункта а).

Пусть  $O$  — точка пересечения данных отрезков,  $V$ ,  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$  и  $V_D$  — объемы тетраэдров  $ABCD$ ,  $OB_1C_1D$ ,  $OC_1D_1A$ ,  $OD_1A_1B$  и  $OABC$  (рис. 4). Пользуясь леммами (3)

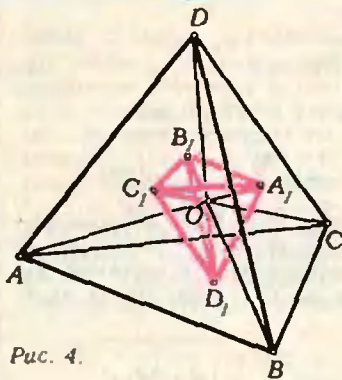
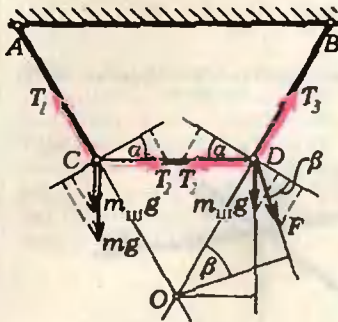


Рис. 4.

**Ф813.** Три невесомых шарнирно связанных стержня длины  $a$  каждый закреплены шарнирно в точках  $A$  и  $B$ , лежащих на одной горизонтали (см. рисунок).  $|AB| = 2a$ . К шарниру  $C$  подвесили груз массы  $m$ . При какой минимальной силе, приложенной к шарниру  $D$ , средний стержень будет сохранять горизонтальное положение?



**Ф814.** На гладкой горизонтальной поверхности тележки лежит шар радиуса  $R$ . Тележка начинает двигаться со скоростью  $v_0$ . Найти горизонтальную проекцию скорости шара в момент его удара об пол.

и (4) (вместо (1) и (2) в пункте а)), легко показать, что  $V_{A,B,C,D} = 3kV$ ,

(ср. (\*)), где

$$k = \frac{V_A V_B V_C V_D}{(V - V_A)(V - V_B)(V - V_C)(V - V_D)}$$

Перемножая «неравенства о средних» для всех четырех троек, составленных из чисел  $V_A, V_B, V_C$  и  $V_D$ :  $\sqrt[3]{V_A V_B V_C} < \frac{1}{3}(V_A + V_B + V_C) = \frac{1}{3}(3V - V_D)$ , ... получим (ср. (\*\*)), что  $k < 1/81$ , и, следовательно,  $V_{A,B,C,D} < \sqrt[3]{V_{ABCD}/27}$ .

Р. П. Ушаков

Поскольку шарнир  $C$  находится в равновесии, сумма сил, действующих на него, равна нулю. Следовательно (см. рисунок),

$$(m + m_{ш})g \sin \alpha = T_2 \cos \alpha, \quad (1)$$

где  $m_{ш}$  — масса шарнира. Из условия равновесия шарнира  $D$  и условия горизонтальности среднего стержня следует, что

$$T_2 \cos \alpha = F \cos \beta + m_{ш}g \sin \alpha. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$F = \frac{T_2 \cos \alpha - m_{ш}g \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \beta} > mg \sin \alpha.$$

Таким образом, минимальная сила  $\vec{F}_{\min}$  при которой средний стержень сохраняет горизонтальное положение, равна по абсолютной величине  $mg \sin \alpha = mg/2$  и направлена перпендикулярно стержню  $BD$ .

С. К. Строков

Приведем еще одно решение этой задачи, присланное читателем А. Р. Зубаткиным.

Внешние силы, действующие на систему, это: приложенные в точках  $A$  и  $B$  силы реакции со стороны «потолка», равные, соответственно,  $|\vec{T}_1|$  и  $|\vec{T}_3|$  и направленные вдоль стержней  $AC$  и  $BD$ ; силы тяжести  $m_{ш}g$ , приложенные к шарнирам; сила  $m\vec{g}$ , равная весу груза; сила  $\vec{F}$ , приложенная к шарниру  $D$ . Поскольку система находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Запишем это условие для точки  $O$  (см. рисунок):

$$mga \sin \alpha + m_{ш}ga \sin \alpha = Fa \cos \beta + m_{ш}ga \sin \alpha.$$

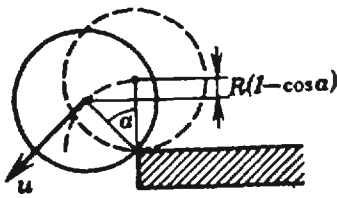
Отсюда

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \beta} \Rightarrow F_{\min} = mg \sin \alpha = mg/2, \quad \vec{F} \perp [BD].$$

Рассмотрим движение шара в системе отсчета, движущейся со скоростью  $v_0$ . В этой системе шар движется со скоростью  $-v_0$ . С того момента, как центр шара окажется точно над краем тележки, и до момента отрыва центр шара движется по окружности радиуса  $R$  с центром в точке касания (при этом шар не вращается вокруг собственного центра). Найдём угол  $\alpha$  (см. рисунок) в момент отрыва. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии и вторым законом Ньютона.

Пусть  $u$  — скорость центра шара в момент отрыва. Тогда

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha) \quad (m - \text{масса шара}) \quad (1)$$



(закон сохранения энергии),

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \alpha \quad (2)$$

(второй закон Ньютона). Из (1) и (2) находим

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \left( \frac{v_0^2}{gR} + 2 \right), \quad u = \sqrt{\frac{1}{3} (v_0^2 + 2gR)}.$$

Поскольку  $\cos \alpha < 1$ , ясно, что при  $v_0^2 > gR$  отрыв произойдет сразу в тот момент, когда центр шара окажется над крайней точкой тележки, и горизонтальная проекция скорости шара  $u$ , при падении на пол будет равна нулю. Если  $v_0^2 < gR$ , то

$$u_r = v_0 - u \cos \alpha = v_0 - \frac{1}{3Rg} \sqrt{\frac{1}{3} (v_0^2 + 2gR)^3}.$$

А. Р. Зильберман

Ф815. Нижний конец капилляра радиуса  $r=0,2$  мм и длины  $l=8$  см погружают в воду, температура которой постоянна и равна  $0^\circ\text{C}$ . Температура верхнего конца капилляра  $t_0=100^\circ\text{C}$ . Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma(t)$  воды приведена в таблице. На какую высоту поднимется вода в капилляре? Теплопроводность капилляра намного превосходит теплопроводность воды в нем; теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь.

$t, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \frac{\text{мН}}{\text{м}}$
0	76
20	73
50	67
90	60



Пусть  $x$  — высота столбика воды в капилляре. Температура капилляра и, следовательно, воды на этой высоте равна, очевидно,

$$t_x = t_0 \frac{x}{l}.$$

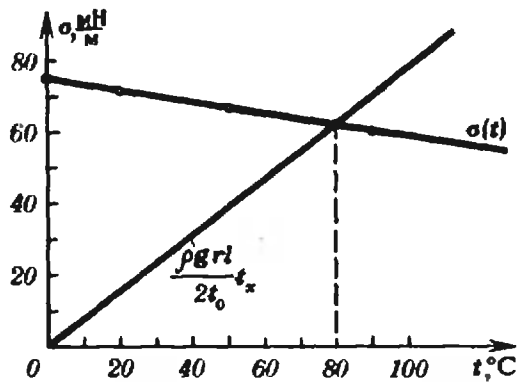
Вода в капилляре удерживается силами поверхностного натяжения. Если  $\sigma(t_x)$  — коэффициент поверхностного натяжения при температуре  $t_x$ , то

$$x = \frac{2\sigma(t_x)}{\rho g r},$$

где  $\rho$  — плотность воды. Отсюда находим

$$\sigma(t_x) = \frac{\rho g r x}{2} = \frac{\rho g r l t_x}{2l_0}.$$

Температура  $t_x$  на уровне максимального поднятия воды



определяется, очевидно, точкой пересечения графика зависимости  $\sigma(t_x) = \frac{\rho g r l}{2l_0} t_x$  и графика  $\sigma(t)$ , построенного по данным таблицы. Из рисунка видно, что  $t_x \approx 80^\circ\text{C}$ . Следовательно,

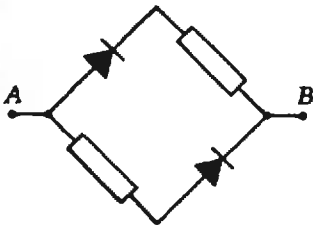
$$x = l \frac{t_x}{t_0} \approx 6,4 \text{ см}.$$

Задачу можно решить и аналитически, если заметить, что точки, взятые из таблицы, хорошо укладываются на прямую.

А. И. Буздин



**Ф816.** В схеме, приведенной на рисунке, сопротивления резисторов одинаковы и равны  $R=60$  Ом, диоды идеальные. Батарея, дающую напряжение  $U=12$  В, подключают к точкам  $A$  и  $B$  на время  $t_1=1$  с. Затем, поменяв полюса местами, подключают батарею к схеме на время  $t_2=5$  с. Найти выделившееся в схеме количество теплоты.



В условии задачи не сказано, какими полюсами подключается батарея к точкам  $A$  и  $B$  на время  $t_1$ , поэтому рассмотрим два возможных варианта включения.

1) Сначала к точке  $A$  подключают «плюс» батареи, а к точке  $B$  — «минус». Так как диоды идеальные, их сопротивления при этом равны нулю, и все три резистора оказываются включенными параллельно друг другу. Полное сопротивление цепи равно  $R_1=R/3=20$  Ом. За время  $t_1$  в цепи выделится количество теплоты

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1} t_1 = 7,2 \text{ Дж.}$$

Когда полюса поменяли местами, ток через диоды не течет, и все три резистора оказываются включенными последовательно. Полное сопротивление цепи при этом равно  $R_2=3R=180$  Ом. За время  $t_2$  в цепи выделится количество теплоты

$$Q_2 = \frac{U^2}{R_2} t_2 = 4 \text{ Дж.}$$

Общее количество выделившейся в цепи теплоты равно

$$Q = Q_1 + Q_2 = 11,2 \text{ Дж.}$$

2) Если сначала к точке  $A$  подключен «минус» батареи, а к точке  $B$  — «плюс», то

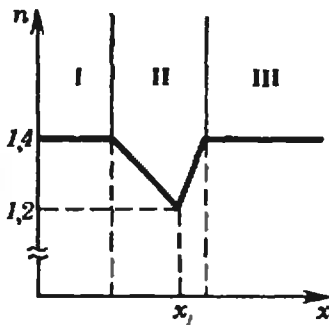
$$Q'_1 = \frac{U^2}{3R} t_1 \approx 0,8 \text{ Дж.}$$

$$Q'_2 = \frac{3U^2}{R} t_2 \approx 36 \text{ Дж.}$$

$$Q' = Q'_1 + Q'_2 \approx 36,8 \text{ Дж.}$$

Л. И. Баканини

**Ф817.** На рисунке показана зависимость показателя преломления  $n$  от координаты. Узкий монохроматический пучок света падает на границу раздела сред I и II. При каких углах падения свет проникает в среду III?



Из закона преломления следует, что вдоль траектории луча значение  $n(x) \cdot \sin \alpha_x$  остается постоянным (здесь  $\alpha_x$  — угол падения луча на границу раздела, которой соответствует координата  $x$ ). Поскольку во второй среде показатель преломления сначала уменьшается, углы падения  $\alpha_x$  будут расти по мере приближения траектории к границе, которой соответствует координата  $x_1$ . При этом касательные к траектории луча будут приближаться к вертикали. Если угол падения во второй среде достигнет значения  $90^\circ$ , то луч не выйдет из этой среды. Если же угол падения будет меньше  $90^\circ$  даже на границе с координатой  $x_1$ , где значение  $n(x_1)$  минимально, луч перейдет из среды II в среду III.

Пусть при некотором начальном угле падения  $\alpha_0$  ( $\alpha_0$  — угол падения на границу раздела сред I и II) угол падения луча на границу с координатой  $x_1$  достигает  $90^\circ$ . Тогда

$$n_1 \sin \alpha_0 = n(x_1) \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha_0 = \frac{1,2}{1,4} \approx 0,86, \alpha_0 \approx 60^\circ.$$

Следовательно, при углах  $\alpha > \alpha_0$  лучи света не смогут проникнуть в среду III. При углах  $0 < \alpha < 60^\circ$  пучок света проникнет в среду III.

В. В. Можжев

# КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



## Физика и суд

В очень полезной научно-популярной книжке Б. В. Булюбаша и В. З. Гуревича «Электричество и тепло» (М., «Наука», 1978) приведен следующий курьезный случай.

В одном из центральных городов России в начале XX века владельцы электростанции поймали с поличным некоего Иванова, укравкой подключившегося к электросети и освещавшего квартиру.



Компания подала на него в суд, обвиняя в хищении принадлежащих ей ценностей. Однако суд оправдал злоумышленника, сославшись на действующее «Уложение о наказаниях». Согласно статье этого документа похищенной могла быть только вещь, имеющая массу и определенные размеры. Сенат, который вторично рассматривал жалобу компании, определил, что электрическая энергия может рассматриваться как «движимое имущество, хотя и не является вещью».

Более хитроумный случай описан в научной монографии немецкого ученого П. Грассмана «Вопросы термодинамического анализа» (М., «Мир», 1965).

В пивоварне охлаждали одни из отдаленных погребов посредством центральной холодильной установки. Трубопровод с рассолом проложили через погреб одного торговца. Вскоре владелец пивоварни обнаружил, что торговец использует рассол для охлаждения своего погреба и обвинил его в краже. Однако судья заявил: «В соответствии со статьей 242 уголовного кодекса кража есть противозаконное присвоение чужого имущества. В данном случае нет состава преступления, так как торговец не присваивал себе рассол, а возвращал его обратно в трубопровод пивоварни.»

Тогда владелец пивоварни обратился в следующую инстанцию и подтвердил свою точку зрения таким аргументом: «Речь идет не о краже рассола, а о краже энергии. Если я буду охлаждать погреб торговца, я должен потреблять больше электроэнергии для холодильной машины». Возражение нового судьи физически было обосновано только наполовину: «Рассол ведь получил тепло, т. е. энергию из погреба торговца, следовательно, у Вас энергию не украл, а, наоборот, Вы получили энергию в подарок».

Мы все догадываемся, что судья был неправ, но далеко не каждый сразу скажет, в чем его ошибка.

В. Ф.



## Рэндзю

В. А. САПРОНОВ

В детстве многие из вас, наверное, играли в «крестики-нолики» на доске  $3 \times 3$  (рис. 1): игроки по очереди ставят «крестики» и «нолики» в свободные клетки; выигрывает тот, кто построит ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали) из трех «крестиков» или, соответственно, «ноликов». Впро-

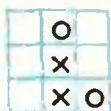


Рис. 1.

чем, те, кто играли в эти простейшие «крестики-нолики», быстро осознавали, что эта игра — ничейная: при правильной игре обоих игроков она заканчивается вничью.

Может быть, поэтому среди студентов и старших школьников распространена игра в «крестики-нолики» на «бесконечной» (то есть неограниченной) доске. Легко видеть, что если на такой доске опять считать выигрывает «три в ряд», то начинающий легко выигрывает. Проверьте, что и в игре «четыре в ряд» начинающий довольно легко выигрывает. Обычно играют «пять в ряд». Практика показывает, что и в этом случае начинающий выигрывает (мы не располагаем доказательством указанного утверждения).

С логической точки зрения рэндзю — промежуточный вариант между двумя описанными разновидностями «крестиков-ноликов». Доска —  $15 \times 15$ . Начинающий ставит «крестик» в центральную клетку. Затем второй игрок ставит «нолик» в любую из 224 свободных клеток. На третьем ходу первый игрок ставит «крестик» в любую свободную клетку, не находящуюся в центральном квадрате  $5 \times 5$  (это единственное ограничение призвано уравновесить шансы сторон). Потом по очереди игроки ставят «нолики» и «крестики» в любые свободные клетки. Выигрывает тот, кто построит ряд из пяти «крестиков» или, соответственно, «ноликов», причем более длинные ряды — не в счет. Вот и все правила рэндзю.

Остается только добавить, что сами рэндзюисты говорят на другом — вполне эквивалентном — языке.

Игра «рэндзю» возникла в Центральной Азии более четырех тысяч лет назад. В нее играли древние римляне и инки доколумбовской Америки. В начале нашей эры рэндзю попало в Японию, где получило наибольшее распространение. В XX веке рэндзю распространилось по всему миру.

Как же играют в рэндзю? Соперники ставят свои шашки в *пункты пересечения линий квадрата* со стороной 14 клеток (рис. 2); на каждой стороне такого квадрата 15 пунктов, всего их  $15 \times 15$ . Начинающий («черные») ставит черную шашку в центральный пункт. Затем второй игрок («белые») ставит белую шашку в любой из 224 свободных пунктов. На третьем ходу черные ставят черную шашку в любой свободный пункт, лежащий за пределами центрального квадрата (на рисунках он нарисован синим цветом), содержащего  $5 \times 5$  пунктов (это ограничение\*) действует только на третьем ходу!). Потом белые и черные по очереди ставят свои шашки в любые свободные пункты. Выигрывает тот, кто построит ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали)

\* Оно было придумано несколько лет назад у нас в стране. Шансы сторон пытаются также уравновесить и другими ограничениями (см., например, «Наука и жизнь», 1980, № 9).

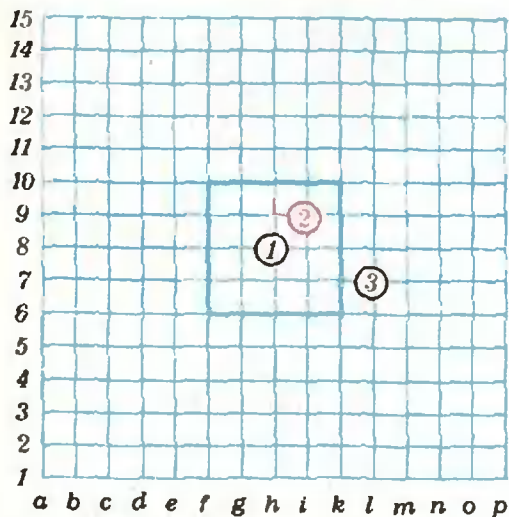


Рис. 2.

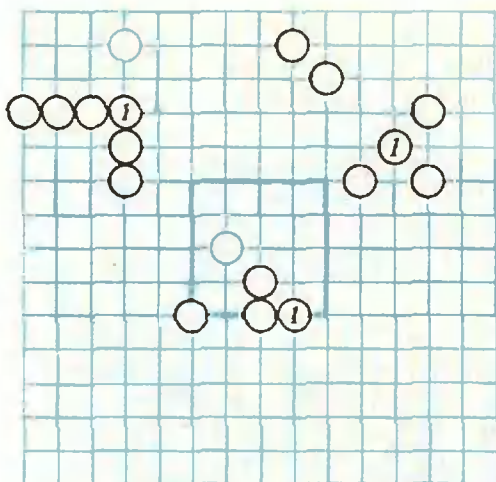


Рис. 3.

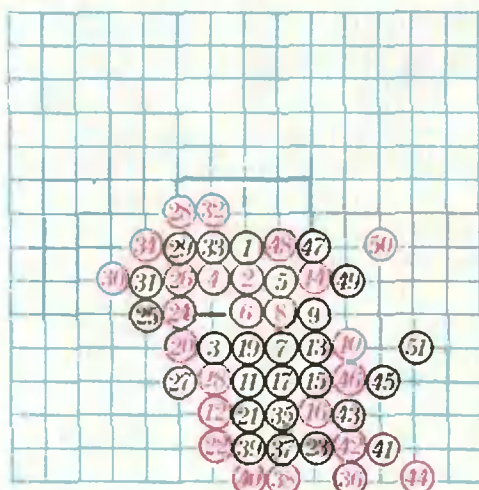


Рис. 4.

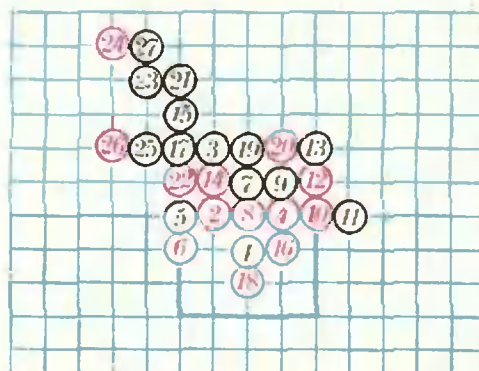


Рис. 5.

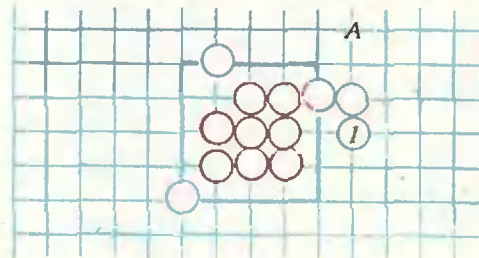


Рис. 6.

из пяти своих шашек, причем более длинные ряды — не в счет.

Вы сели за доску и тут же поняли, как непросто выиграть: соперник не прекрывает все ваши попытки достичь заветной пятерки и сам угрожает выигрышем. Как одержать верх?

Начнем с конца. Все атаки, если, конечно, противник не допустил элементарного зевка, завершаются построением какой-нибудь из вилок: 4-4, 4-3 или 3-3 (рис. 3; цифрой 4 обозначены четверки — *шахи*, цифрой 3 — тройки — *полушахи*).

На рисунке 4 показана партия Макаренко — Сапронов из второго чемпионата Москвы (черные шашки здесь и дальше изображаются черными кружочками, белые шашки — красными кружочками; число внутри кружочка — номер хода; советуем вам нарисовать доску и «разыграть» на ней эту партию ход за ходом). На 34-м ходу белые поставили полушах, на что черные ответили серией шахов (ходы 35, 37, 39, ..., 51), закончившейся вилкой 4-3, после чего белые вынуждены были сдаться.

На рисунке 5 показана партия Янсон — Суидлинг из чемпионата Швеции. На 18-м ходу белые поставили полушах, на что черные ответили серией шахов (ходы 19, 21, ..., ..., 27), закончившейся вилкой 4-3. (На мой взгляд, 5-й ход черных — не из лучших, и белые могли это доказать, сыграв 6-м ходом в пункт 9. Более перспективным был бы для черных 5-й ход в пункт 8; если бы белые 6-м ходом пошли в пункт 7, черные 7-м ходом поняли бы в пункт 6.)

Иногда угроза вилки эффективнее серии «шах, полушах» или «полушах, шах». На рисунке 6 после хода черных в пункт 1 белые беззащитны. Нетрудно проверить, что лобовой ход в пункт А и лишь затем ход в пункт 1 лишали бы черных шансов на победу.

На рисунке 7, наоборот, белым следует сыграть «примитивно» в пункт 1, а затем — в пункт 3. Пойди белые сразу в пункт 3, черные без труда защитились бы.

На рисунке 8 черные ходом в пункт 1 создали исходную позицию для последующей атаки серией шахов (такой ход называется *обозначен-*

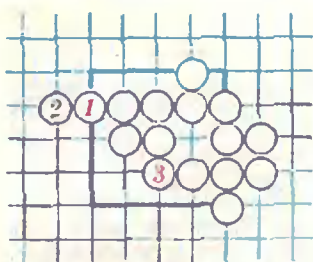


Рис. 7.

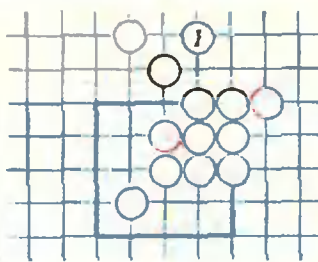


Рис. 8.

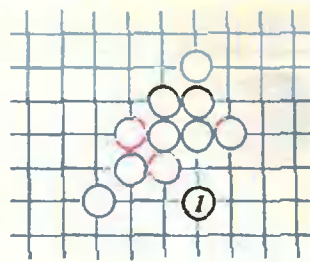


Рис. 9.

нием) и решили ход борьбы в свою пользу — белым пора сдаваться.

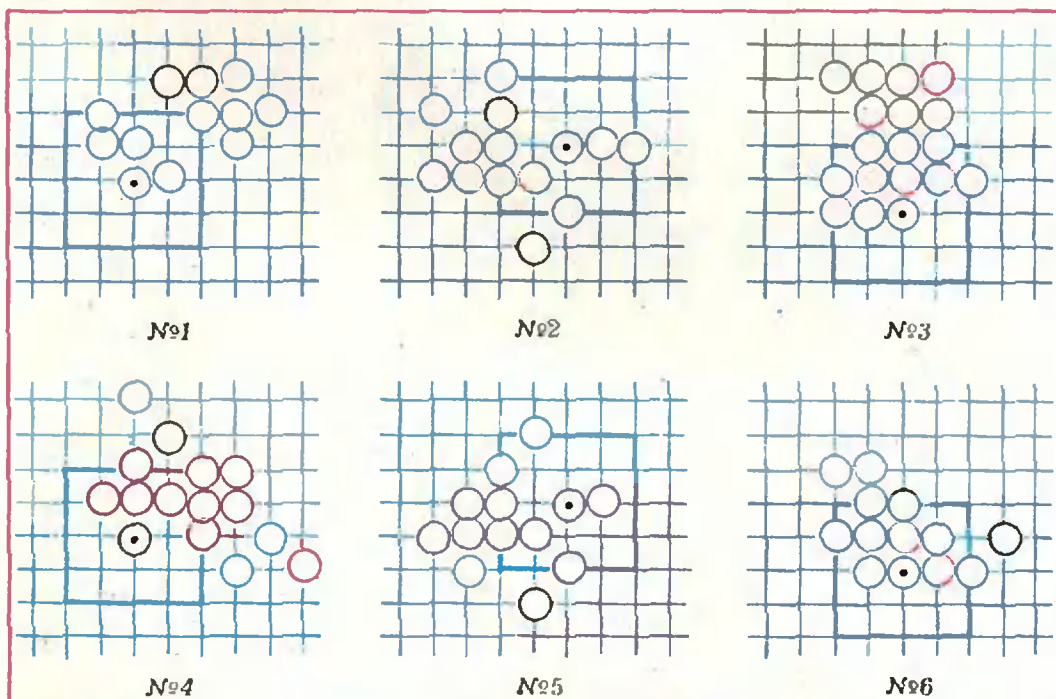
В этюде на рисунке 9 черные выигрывают тихим ходом — паузой — в пункт 1.

В заключение мы объявляем конкурс задач по рэндзю. Конкурс проводится в два тура. Десять

победителей будут награждены призами, занявший первое место будет приглашен для участия во Всесоюзном турнире по рэндзю.

Окончание статьи и задачи второго тура — в № 10.

### Задачи первого тура



В №№ 1—3 черные начинают и выигрывают.

В №№ 4—6 белые начинают и выигрывают.

Во всех случаях требуется указать кратчайший выигрыш (до построения победной вилки) при оптимальном сопротивлении противоположной стороны.

Решения присылаются в виде диаграмм (решения в алгебраической нотации рассматриваться не будут). Шапки исходной позиции не нумеруются. Первый ход предлагаемого решения нумеруется числом 1. Победные серии шагов и побочные варианты допустимо обозначать буквами.

Решения задач первого тура должны быть высланы не позднее 31 октября.



## Какое оно — наше солнце?

Кандидат педагогических наук  
Е. П. ЛЕВИТАН

Среди бесчисленных звезд Вселенной есть одна, которая нас интересует больше всех остальных. Это — Солнце. Об исключительной роли дневного светила люди догадывались давно. Не зная, что представляет собой Солнце и почему оно способно дарить Земле тепло и свет, его обожествляли.

Прошли века. Ушло и прошлое поклонение Солнцу. В наше время Солнце — важный и интересный объект комплексных научных исследований, которые проводят ученые разных стран. Изучается физическая природа Солнца и его атмосферы, эволюция солнечного вещества, влияние солнечной активности на разнообразие зем-



ные явления, такие как полярные сияния, магнитные бури, а также метеорологические и биологические явления.

Обо всем этом рассказывается в книге Э. В. Кононовича «Солнце — дневная звезда», которую в 1982 году выпустило издательство «Просвещение». Книга адресована школьникам девярых—десятих классов. Оказывается, знание физики и математики даже в объеме девятого класса достаточно для того, чтобы разобраться в существовании таких непростых вопросов, как внутреннее строе-

ние Солнца, способы передачи энергии внутри плазменного солнечного шара, природа и роль магнитных полей на Солнце.

Хотелось бы отметить, что книга написана очень «физично». Автору удалось найти множество наглядных образов, дающих, по крайней мере, качественное представление о физике Солнца. И это не удивительно, ибо Э. В. Кононович — специалист в области исследования Солнца, опытный педагог (он доцент МГУ), один из авторов курса общей астрономии для студентов, автор многих научно-популярных публикаций.

В книге Солнце рассматривается как типичный представитель звезд Вселенной. «Изучив подробности строения Солнца и его взаимодействие с явлениями на Земле, мы теперь можем более широко взглянуть на всю проблему роли звезд во Вселенной. И это представляется нам самым главным, ради чего написана книга» — пишет автор в заключительной главе книги.

Думается, что многих из вас книга Э. В. Кононовича «Солнце — дневная звезда» не просто заинтересует, а увлечет солнечной проблематикой.



## К сведению читателей!

Открыта подписка на научно-популярный физико-математический журнал «Квант» на 1984 год. Подписка принимается без ограничения всеми отделениями «Союзпечати» и общественными распространителями печати.

В розничную продажу журнал не поступает. Периодичность — 12 номеров в год.

Цена одного номера — 40 копеек.



## Всесоюзный смотр «Юные техники, натуралисты и исследователи — Родине!»

Секретариат ЦК ВЛКСМ, Коллегия Министерства просвещения СССР, Президиума ВС НТО, Президиум ЦС ВОИР, Бюро Президиума ЦК ДОСААФ СССР постановили провести в 1982—1985 годах Всесоюзный смотр «Юные техники, натуралисты и исследователи — Родине!» Этот смотр — составная часть Всесоюзного смотра научно-технического творчества молодежи, проводимого в годы 11-й пятилетки.

В смотре участвуют юные техники, натуралисты, исследователи — все любители науки и техники, кружки, станции, клубы, школы юных, научные общества учащихся, школьные организации ВОИР и другие юношеские и подростковые научно-технические, опытнические, военно-патриотические и спортивно-технические объединения, созданные и работающие в общеобразовательных школах, во внешкольных и культурно-просветительных учреждениях, учебно-производственных комбинатах, домах техники, НТО, спортивно-технических клубах и школах ДОСААФ, при предприятиях и организациях, в высших учебных заведениях.

Руководство подготовкой и проведением смотра осуществляет оргкомитет, утвержденный учредителями смотра. Для организации смотра на местах создаются, соответственно, республиканские, краевые, областные, городские, районные оргкомитеты.

Для обеспечения оперативного руководства ходом смотра могут создаваться штабы (советы) в школах, УПК, внешкольных учреждениях, на предприятиях и в организациях.

В ходе смотра школьники ведут работу по направлениям: «Юные техники и исследователи — школе»;

«Юные техники и исследователи — производству»; «Юные техники, натуралисты и исследователи — сельскому хозяйству, другим отраслям агропромышленного комплекса»;

«Юные техники, натуралисты и исследователи — лесному хозяйству, охране окружающей среды»; «Юные техники и исследователи — армии, авиации, флоту»; «Юные техники и исследователи — научно-техническому прогрессу».

Целью и задачами смотра являются:

— воспитание у будущей смены рабочего класса, колхозного крестьянства, советской интеллигенции потребности к активному участию

в ускорении научно-технического прогресса, привлечение максимального числа учащихся общеобразовательных школ к эффективным формам научно-технического творчества, сельскохозяйственного опыта, исследовательской работы, расширение сети юношеских и подростковых научно-технических и опытнических кружков, секций, объединений, всемерное укрепление их материальной базы;

— укрепление связи научно-технических опытнических объединений школьников с производством, научными учреждениями, высшими учебными заведениями, организациями НТО, ВОИР и ДОСААФ, привлечение к работе с детьми и подростками ученых, специалистов народного хозяйства, передовиков и новаторов производства, изобретателей и рационализаторов, студентов;

— рациональное использование материально-технической базы предприятий, колхозов, совхозов, научных, проектных и конструкторских организаций, культпросветучреждений, домов техники, НТО, спортивно-технических клубов и школ ДОСААФ для всестороннего развития познавательной активности школьников, формирования у них навыков творческой работы, научно-исследовательской и рационализаторской деятельности;

— усиление пропаганды среди школьников достижений науки, техники и производства, перспектив социально-экономического развития трудовых коллективов, знаний в области экономики, углубления практической и народнохозяйственной направленности в деятельности юных техников, натуралистов и исследователей, привлечение их к посильному участию в борьбе за экономию и бережливость.

Итоги смотра подводятся ежегодно:

в школах, внешкольных учреждениях, клубах юных техников и натуралистов, Дворцах и Домах культуры профсоюзов, комнатах при ЖЭКах, вузах и НИИ в январе — в ходе Всесоюзной недели науки, техники и производства для детей и юношества; в городах и районах — в марте — на выставках лучших работ и конференциях юных техников и натуралистов, членов ЦОУ; в области, крае, республике — в мае — июне.

Итоги Всесоюзного смотра будут подводиться на Всесоюзном слете юных техников, натуралистов и исследователей летом 1986 года.

Постановлением о проведении смотра комитетами комсомола, органам народного образования, правлениям, советам НТО и ВОИР, комитетам ДОСААФ предложено в ходе смотра направить организаторскую работу на широкое привлечение детей и подростков к активным формам научно-технического творчества, сельскохозяйственного опытничества, исследовательской работы, осуществить действенные меры по дальнейшему развитию сети и укреплению материальной базы научно-технических объединений учащихся, содействовать углублению практической и народнохозяйственной направленности в их работе.

## Конкурс математических проектов

В ноябре 1982 года в Омске при проведении финала математического боя базовых школ Омского университета был организован конкурс математических проектов. Суть конкурса заключалась в необходимости применить математику, здравый смысл, интуицию к решению практических проблем. Фактически требовалось построить математическую модель описанной ситуации и исследовать ее. Темы проектов были ранее предложены на олимпиаде «Студент и научно-технический прогресс»; оказалось, что школьники тоже могут продвинуться достаточно далеко в разработке этих проблем.

Непосредственно конкурс можно проводить в следующей форме: команда докладывает у доски подготовленный дома проект в течение 3—5 минут, после чего защищает его, отвечая на вопросы команд-соперниц и жюри. За защиту проекта она может получить до десяти баллов. После этого выступают оппоненты. Удачная и справедливая критика дает команде до трех баллов, а конструктивное улучшение проекта — до пяти. Потом выступает следующая команда и так далее. На конкурс целесообразно выносить не более 3—4 тем проектов.

### Темы проектов конкурса в Омске

1. Десять изобретателей предложили свои варианты решения одной и той же инженерной проблемы. По условиям конкурса с их решениями ознакомились пять экспертов, каждый из которых указал в бланке фамилии трех изобретателей, заявивших, по его мнению, первое, второе и третье места.

Требуется придумать процедуру обработки этих данных и выявления первых трех победителей конкурса, после чего охарактеризовать достоинства и недостатки процедуры.

2. Магазин «Тысяча мелочей» продает номерки для квартир в виде отдельных цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Ясно, что потребность в каждой из этих цифр неодинакова.

Придумать процедуру, позволяющую определить примерную потребность в каждой из этих цифр, сделать предварительную оценку, в какой пропорции они должны заказываться.

3. На олимпиаду было предложено 15 задач, разделенных жюри на пять «легких», пять «средней трудности» и пять «трудных». Легкие задачи оценивались 1, 2 или 3 баллами, средние — 4—7 баллами, трудные — 8—10 баллами. После проверки работ жюри пришло к выводу, что ошиблось в оценке трудности ряда задач. В самом деле, одну «трудную» задачу решили все без исключения участники, а три из пяти «легких» решили меньше участников, чем любую задачу «средней трудности». Стало понятно, что при оценке трудности задач следует учитывать не только мнение жюри («априорная оценка»), но и результаты участников («апостериорная оценка») в виде отношения числа решивших данную задачу к числу всех участников. Поэтому итоговая оценка трудности задачи должна каким-то разумным способом комбинироваться из двух указанных оценок.

Придумайте такой способ и выявите его сильные и слабые стороны.

4. Агроном на опытном поле площадью 1 га вырастил хороший урожай и до уборки хочет оценить его. Обычно он собирает урожай на 3—4 делянках по 1 м<sup>2</sup> каждая и усредняет его. Однако условия для роста злаков в разных местах неодинаковы (в одном месте они находились в тени лесозащитной полосы, в другом оказались близко у дороги, в третьем оказался избыток удобрений... учесть все условия невозможно). Поэтому агроному надо как-то уменьшить величину ошибок, получающихся от умножения среднего урожая на 1 м<sup>2</sup> делянок на общую площадь поля.

Как это сделать?

5. Оцените время выливания всей жидкости из стандартного молочного пакета тетраэдрической формы.

6. Какне грейпфруты покупать выгоднее: крупные или мелкие?

*В. Н. Сергеев*

## Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь своим учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, все желающие смогут посетить научные лабо-

ратории физического факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для учащихся десятых классов организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Принем в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться, начиная с 26 сентября. Работаящая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявление можно подавать с 5 по 24 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, В-34, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.



Ответы, указания, решения



**Вокруг биссектрисы**

(20) Пусть  $H$  — точка пересечения высот, тогда  $MN$  проходит через середину  $BH$  — точку  $K$ ,  $|BK| = |B_1O|$  ( $B_1$  — середина  $AC$ ). Далее, докажите, что прямая  $MN$  параллельна  $OB$  (если  $\hat{C} > \hat{A}$ , то  $\widehat{MKH} = \widehat{MBH} = \hat{C} - \hat{A} = \widehat{OBH}$ ).

(21) Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности с центром  $I_a$  можно вычислить по формуле

$$Q_a = S_{ABC} \cdot \frac{r_a}{2R} = \frac{S_{ABC}}{2R} \cdot \frac{1}{p-a}$$

Аналогичные формулы могут быть получены для площадей других треугольников.

(22) Пусть  $K_1$  и  $L_1$  — такие точки на  $BC$  и  $BA$ , что  $K_1K \parallel L_1L \parallel BB'$ . Достаточно доказать, что треугольники  $BK_1K$  и  $BL_1L$  подобны, то есть, что  $|BK_1| : |K_1K| = |BL_1| : |L_1L|$ . Имеем

$$\frac{|BK_1|}{|BA'|} = \frac{|B'K|}{|B'A'|}, \quad \frac{|K_1K|}{|BB'|} = \frac{|A'K|}{|B'A'|},$$

и по теореме (1)

$$\frac{|BK_1|}{|K_1K|} = \frac{|B'K|}{|A'K|} \cdot \frac{|BA'|}{|BB'|} = \frac{|CB'|}{|CA'|} \cdot \frac{|BA'|}{|BB'|} = \frac{c}{b} \cdot \frac{|CB'|}{|BB'|} = \frac{ca}{(a+c)|BB'|}.$$

Последнее выражение симметрично относительно  $a$  и  $c$ , а значит, равно также и  $|BL_1| : |L_1L|$ .

(23) Докажем, что оба утверждения эквивалентны равенству  $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ . Возьмем на дуге  $BAD$  точку  $A_1$  так, что  $|DA_1| = |AB|$ . Условие задачи эквивалентно тому, что прямая  $A_1C$  проходит через  $N$  — середину  $BD$ , то есть равенству площадей треугольников  $DA_1C$  и  $A_1BC$ , откуда  $|DA_1| \times |DC| = |BA_1| \cdot |BC|$  или  $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ .

(24) Пусть  $B_1$  — середина  $AC$ . Продолжим биссектрису до пересечения в точке  $B_2$  с перпендикуляром, восстановленным к  $AC$  в точке  $B_1$ . Точка  $B_2$  лежит на описанной около  $ABC$  окружности. Проведем через  $M$  перпендикуляр к  $AC$ , пусть  $L$  — точка его пересечения с  $AC$ ,  $K$  — с  $BB_1$ , тогда  $|KM| = |ML|$ . Проведем через  $K$  прямую, параллельную  $AC$ , пересекающую  $AB$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$ . Если  $G$  и  $F$  — проекции  $D$  и  $E$  на  $AC$ , то  $M$  — центр прямоугольника  $GDEF$ , причем  $\triangle DME \sim \triangle AB_2C$  ( $\triangle DME$  получается из  $\triangle AB_2C$  при гомотетии с центром в  $B$ ). Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \widehat{MCL} &= \frac{|LC|}{|ML|} = \frac{|LF|}{|ML|} + \frac{|FC|}{|ML|} = \\ &= \frac{|AB_1|}{|B_1B_2|} + 2 \frac{|FC|}{|EF|} = \operatorname{ctg} \frac{\hat{B}}{2} + 2 \operatorname{ctg} \hat{C}. \end{aligned}$$

Если теперь  $B'$  — основание биссектрисы,  $P$  и  $T$  — проекции  $N$  и  $B'$  на  $BC$ , то

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \widehat{NCB} &= \frac{|PC|}{|NP|} = \frac{|PT|}{|NP|} + \frac{|TC|}{|NP|} = \frac{|BP|}{|NP|} + \\ &+ 2 \frac{|TC|}{|B'T|} = \operatorname{ctg} \frac{\hat{B}}{2} + 2 \operatorname{ctg} \hat{C}, \end{aligned}$$

то есть  $\widehat{MCA} = \widehat{NCB}$ .

(25) Произведение длин отрезков от вершины  $A$  треугольника до точек пересечения стороны  $AB$  с данной окружностью будет равно такому же произведению для стороны  $AC$ . Эти длины легко выразить через длины рассматриваемых хорд и длины сторон треугольника. Аналогичные равенства можно записать для вершин  $B$  и  $C$ . Таким образом мы получим систему уравнений, позволяющую выразить длины хорд через длины сторон и проверить утверждение задачи прямым вычислением. Чтобы избежать перебора вариантов, удобно выбрать какое-то направление обхода треугольника и считать отрезки направленными, а их длины — произвольными действительными числами.

(26) Пусть  $\widehat{KAL} = \widehat{KLA} = \varphi$ ,  $\widehat{KCL} = \widehat{LKC} = \psi$ . Тогда  $\widehat{BKL} = 2\varphi$ ,  $\widehat{BLK} = 2\psi$ ,  $2\varphi + 2\psi = 180^\circ - \hat{B}$ . Если  $Q$  — точка пересечения  $AL$  и  $KC$ , то  $\widehat{AQC} = 180^\circ - (\varphi + \psi) = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}$ . Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $BC$ , до пересечения с  $KC$  в точке  $N$ , тогда  $MQ$  — биссектриса угла  $AMN$  и  $\widehat{AQN} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}$ . Отсюда следует,

что  $Q$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $AMN$ , значит,  $\triangle AMN \sim \triangle KBL$ . Пусть  $|AK| = |KL| = |LC| = x$ ,  $|AM| = y$ ,  $|MN| = z$ . Из того, что  $\triangle AMN \sim \triangle KBL$  и  $\triangle KMN \sim \triangle KBC$ , получим

$$\frac{z}{a-x} = \frac{y}{c-x} \cdot \frac{y-x}{c-x} = \frac{z}{a},$$

откуда  $y = a$ .

(27) Перпендикулярность биссектрис доказывается без труда. Докажем второе утверждение. Пусть  $M$  — середина  $AC$ ,  $N$  — середина  $BD$ . Из подобия треугольников  $AMK$  и  $BKD$

следует, что  $\widehat{MKA} = \widehat{NKD}$  и  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ ,

то есть биссектриса угла  $BKC$  является также биссектрисой угла  $MKN$  и делит отрезок  $MN$  в

отношении  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ . Очевидно, что

в этом же отношении делит  $MN$  и биссектриса угла  $ALB$ .

Когда  $|a+b| = |a| + |b|$ ?

1. а)  $\{0, 2\}$ ; б) При  $a < -1$  нет корней, при

$-1 < a < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  — луч  $]-\infty; a]$ , при

$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  — вся числовая прямая  $\mathbb{R}$ ,

при  $a > \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  — луч  $[a; +\infty[$ .

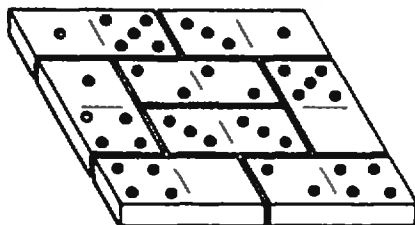
2. а)  $\{0; 1\}$ ; б)  $\{7; +\infty\}$ .

3. а)  $\emptyset$ ; б)  $y = \sin x + 1$  на отрезках  $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $y = \sin x - 1$  на отрезках  $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**«Квант» для младших школьников**

(см. «Квант» № 6)

1. Пусть значение закрытой части косточки домино —  $x$ . Тогда сумма очков на всех косточках равна  $37+x$ . Но эта сумма делится на 4, поскольку в каждом горизонтальном ряду «магического квадрата» сумма одинакова. Это может быть только в случае  $x=3$ . Расположение косточек в виде «магического квадрата» показано на рисунке.



2. Возраст школьника, родившегося в августе и пошедшего в первый класс в 7 лет, на 6 больше номера класса, в котором он учится. Поэтому Боря на 6 лет старше Алёши. Когда Боря закончит десятый класс, Алёша закончит четвертый класс и перейдет в пятый.

3. Количество промежутков между точками на 1 меньше, чем самих точек. Значит, если в каждый промежуток поставить по новой точке, то общее количество точек будет равно сумме двух последовательных чисел, из которых одно — четное, а другое — нечетное.

4. Если бы Петя не вышел из дома с запасом в 8 минут, то он, в случае возвращения домой за ручкой, опоздал бы не на 10, а на 18 минут, которые он должен был потратить на двукратное прохождение только что пройденного пути. Отсюда следует, что в

момент, когда он вспомнил о забытой ручке, он шел уже 9 минут, то есть прошел  $\frac{9}{20}$  пути.

5. Если бы Земля не вращалась вокруг оси, то за один оборот по орбите смена дня и ночи произошла бы на ней один раз, причем заря двигалась бы по планете в необычном направлении — с запада на восток. Поэтому при совпадающих направлениях вращения вокруг оси и обращения по орбите эти сутки нужно вычесть из числа оборотов вокруг оси, при противоположных направлениях — добавить. Значит, в указанном в условии случае число смен дня и ночи увеличилось бы на  $\frac{2}{365}$ , то есть каждые сутки уменьшились на  $\frac{2}{365}$  от нынешних суток (примерно 8 минут).

**Шахматная страничка**

(см. «Квант» № 5)

**Задание 9** (Т. Доусон, 1916 г.). Белый слон не прочь объявить мат неприятельскому королю с полей e3 или g3, и кажется, что в силу симметрии позиции должны существовать два решения. Однако свободная вертикаль а вносит коррективы. Правильно только 1.g6, 2.h5, 3.Ch4 и 4.C:g3x. При аналогичном маневре на ферзевом фланге черный слон успевает запатовать себя: 1.c6 Ch5! 2.b5 g6 и после 3.Cb4 на доске пат.

**Задание 10** (В. Паули, 1920 г.). К цели ведет только 1. Kc6! Kpd6 2. Jb3 Krc7 3. Krc7 Krc8 4. Ka7+ Krc7 5. Jb7x; 2... Krc6 3. Jd3 Krl6 4. Jlg3 Krc6 5. Jlg6x; 2... Krc5 3. Kpd7 Krc4 4. Cd3+ и 5. Jb5x. Симметричное 1. Kg6 не проходит, так как после 1... Krl6 2. Jh3 Krg7 3. Krc7 Krg8 у белых нет шаха коном — справа не хватает одной вертикали.

**Главный редактор** — академик И. К. Кикоин**Первый заместитель главного редактора** — академик А. Н. Колмогоров**Заместители главного редактора:** М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев**Редакционная коллегия:** Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новляков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, И. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант**Редакционный совет:** А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Великов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иваниов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев**Номер оформила:**Л. В. Денисенко, М. Б. Дубак, А. М. Кошечной, А. К. Малкин, Э. В. Назarov, А. М. Пономарев, В. А. Серов, М. П. Сидоров, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина, С. В. Юкин  
**Фото Ю. Ю. Житковского, В. П. Шевченко****Заведующая редакцией** Л. В. Чернова**Главный художник** Э. А. Смирнов**Художественный редактор** Т. М. Макарова**Корректор** Т. С. Вейсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.

«Квант», тел. 250-33 54.

Сдано в набор 16.6.83. Подписано к печати 14.7.83.

Печать офсетная

Бумага 70 × 108<sup>1/16</sup>

Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,89. Т-15666

Цена 40 коп. Заказ 1573. Тираж 166 385 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
ВО «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
г. Чехов Московской области

## Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

## КАСПАРОВ ИГРАЕТ МАГАРАДЖЕЙ

В «Кванте» однажды рассказывалось об игре с участием сказочной фигуры *магараджа*. Это очень сильная фигура, которая может ходить и как ферзь, и как конь. Даже если белые владеют полным комплектом обычных фигур (на исходных местах), а черные только магараджей, то белым поймать магараджу не так просто, и неопытный игрок может быстро растерять все свое войско. И все же белые при точной игре ловят магараджу, причем не позднее 15-го хода. Не обращая внимания на его перемещения (магараджа мужского рода!), белые делают следующие 14 ходов: a4, La3, h4, Lh3, Ke3, Kf3, Lg3, d4, Фd3, Фе4, Lb3, Lb7, Фd5, Lg8. Нетрудно убедиться, что при этих ходах магараджа не мог взять ни одну белую фигуру. Теперь у него есть два свободных поля — a6 и f6, в первом случае он гибнет после 15. Сg5, а во втором — после 15. e4.

На нашей шахматной страничке нередко встречаются те или иные математические сюжеты. Однако любители шахмат (а их среди будущих математиков и физиков немало), судя по письмам, с интересом знакомятся с различными шахматными событиями, смотрят партии, решают задачи и этюды. Сегодня мы хотим привести одну из партий четвертьфинального матча претендентов между Каспаровым и Белявским.

В «Кванте», 1983, № 2 уже рассказывалось о международном турнире в Москве, в котором эти двое та-

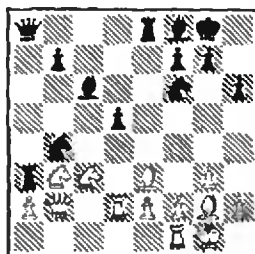
лантливых гроссмейстеров завоевали претендентские путевки. Жаль, что жребий свел их в самом начале и продолжить борьбу за мировое первенство смог только один из них — Гарри Каспаров, взявший верх со счетом 6:3. Лучшей в матче победитель назвал вторую партию.

А. Белявский — Г. Каспаров

Ферзевый гамбит

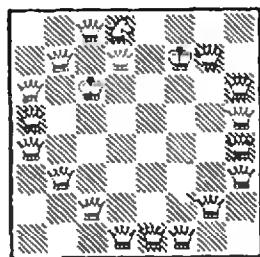
1. d4 d5 2. c4 e6 3. Кс3 с5.

Определяет защиту Тарраша, которая долгие годы пребывала в забвении, пока не была реабилитирована Б. Спасским в его победном матче за мировую корону с Т. Петросяном. С тех пор популярность защиты не падает. 4. cd ed 5. Kf3 Kc6 6. g3 Kf8 7. Cg2 Ce7 8. 0—0 0—0 9. Cg5 cd 10. K:d4 h6. Что представляет собой изолированная пешка «d» — силу или слабость? Наверное, этот вопрос будет существовать вечно. Никто не помнит, чтобы бакинец когда-нибудь избирал защиту Тарраша, и дебютный сюрприз черных удался: на часах Белявского пошел второй час, Каспаров же потратил на свои ходы считанные минуты. 11. Ce3 Le8 12. Фа4. В шестой партии Белявский уже не был застигнут врасплох и поставил здесь ферзя на с2, правда, добиться перевеса все равно не сумел. 12...Cd7 13. Lад1 Kb4 14. Фb3 a5 15. Ld2. Теория рекомендует 15. a4 с небольшим перевесом у белых. Наверное, Каспаров готов был поспорить с этой оценкой, но теперь ему и спорить не приходится. Черные захватывают инициативу на ферзевом фланге, не имея никаких дефектов и на других участках доски. 15...a4 16. Фd1 a3 17. Фb1. Время идет, а белый ферзь никак не может найти уютного пристанища. 17...Cf8 18. ba L:a3 19. Фb2 Фа8 20. Kb3 Cc6.

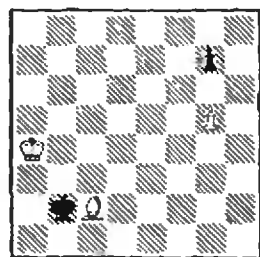


После этого Гарри взглянул в дальний угол зала, где сосредоточились его самые преданные болельщики, и принялся за шоколадку. По всему было видно, что он доволен своей позицией. 21. Cd4 Ke4 22. K:e4 de. Проблема изолированной пешки в данной партии полностью решена — она поднялась к своей соседке и перестала быть одинокой. 23. La1 Cd5 24. Фb1 b6 25. e3. Грозило смертельное e4—e3, но теперь обнажается пункт d3. 25...Kd3 26. Ld1 b5 27. Cf1 b4 28. C:d3 ed 29. Ф:d3 L:a2 30. L:a2 Ф:a2 31. Kc5 Cf3. У белых очень слабы белые поля, с такими проблемами трудно бороться против гроссмейстера. 32. La1 Фd5 33. Фb3 Фh5 34. Kd3 Cd6 35. Ke1 Cb7 36. Lc1 Фf5. Черный ферзь весьма активен, в этой партии он почти так же силен, как магараджа... 37. Ld1 Cf8 38. Фb1. Последний ход ферзем не считается — в этой безрадостной позиции на часах Белявского упал флаг.

## Конкурсные задания



15. На диаграмме нарисовано расположение фигур. Возникшее в партии, только все фигуры нарисованы белыми. Восстановить настоящие цвета фигур.



16. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 октября 1983 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь показаны модели двух поверхностей, а также полоски, из которых они сплетены. В отличие от, например, цилиндра, большинство поверхностей нельзя изготовить точно изгибанием одного или нескольких листов бумаги (или другого нерастяжимого материала). Однако приблизительно кусок любой поверхности с любой точностью можно моделировать при помощи узких полосок бумаги или (как это сделано здесь) цветной пленки.

Секрет в том, что полоски — переменной ширины, каждая должна иметь свою криво-

линейную форму. Расчет формы полосок был проведен на ЭВМ, а их «раскрой» — на графопостроителе.

Поверхность при этом представляется множеством криволинейных четырехугольных ячеек, длины и диагонали которых подсчитываются; затем каждая ячейка заменяется двумя треугольниками, и примыкающие друг к другу треугольники чертятся, образуя полоску. После склеивания полосок краями или переплетения продольных и поперечных полосок в шахматном порядке поверхность приобретает «свою» форму.

Ю. В. Котов

